



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
2 mai 2015

Profil real, specializarea științele naturii



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## CLASA A XI-A

- Demonstrați că dacă  $X$  și  $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot Y = I_3$ , atunci  $Y \cdot X = I_3$ .
  - Demonstrați că dacă  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , astfel încât  $A + B = 3AB$ , atunci  $(3A - I_3)(3B - I_3) = I_3$  și  $A \cdot B = B \cdot A$ .
- Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție care verifică inegalitatea  $|\cos x - 2^x + f(x)| \leq x^2, (\forall) x \in \mathbb{R}$ .  
Demonstrați că:
  - $f(0) = 0$ ;
  - $f$  este continuă în punctul  $x = 0$ ;
  - Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .
- Fie  $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $A \cdot A' = B \cdot B' = I_3$ . Să se demonstreze că cel puțin una dintre matricele  $A + B$  sau  $A - B$  este singulară ( $A'$  este transpusa matricei  $A$ ).
- Un călător parcurge dus – întors același traseu de lungime  $d$  în două zile, de fiecare dată în același interval de ora,  $8^{00} - 12^{00}$ . În prima zi (la dus) o funcție continuă și monotonă  $f : [8, 12] \rightarrow [0, d]$ , exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, iar a doua zi (la întors) o altă funcție continuă și monotonă  $g : [8, 12] \rightarrow [0, d]$ , exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, în sens invers, până la fiecare moment orar  $t \in [8, 12]$ . (în care fracțiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcția  $F : [8, 12] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = f(t) + g(t) - d$ .
  - Calculați  $F(8)$  și  $F(12)$ .
  - Dacă  $t_0 \in [8, 12]$  și  $F(t_0) = 0$ , demonstrați că la momentul  $t_0$  călătorul se află în același loc pe traseu, atât la dus cât și la întors.
  - Demonstrați că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeași oră atât la dus cât și la întors.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.