INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin: $x_0=1, x_1=3$ şi $x_{n+2}=2\cdot x_{n+1}+3\cdot x_n, (\forall)n\geq 0.$

a) Demonstrați că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) Calculați $S=\sum\limits_{k=0}^{2015}x_k$.

G.M. nr. 1 / 2015 – supliment

<u>Soluție:</u>

a) $x_0=1, x_1=3\Rightarrow x_2=2\cdot x_1+3\cdot x_0=3^2$ 1p

Presupunem că $x_n=3^n$, $x_{n+1}=3^{n+1}$ 1p

Avem: $x_{n+2}=2\cdot 3^{n+1}+3\cdot 3^n=3^{n+2}$ 1p

Conform principiului inducției matematice complete rezultă că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p

b) $S=\sum\limits_{k=0}^{2015}x_k=1+3+3^2+...+3^{2015}$ 1p

Pentru progresia geometrică $\div b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, de rație $q\neq 1$, suma termenilor este :

$S_n=\dfrac{b_1\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1}\Rightarrow S=\sum\limits_{k=0}^{2015}x_k=\dfrac{3^{2016}-1}{2}$ 2p

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $5a+4b+6c=0$.

a) Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, calculați expresia $E(a,b,c)=\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)$, grupând rezultatul după a,b şi c .

b) Demonstrați faptul că există $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)=0$.

c) Justificați existența unui punct $M_0\left(x_0,0\right)$ situat pe graficul funcției f cu proprietatea că $x_0\in[0,2]$.

<u>Soluție:</u>

a) $E(a,b,c)=\alpha\cdot c+\beta\cdot(a+b+c)+\gamma\cdot(4a+2b+c)=a\cdot(\beta+4\gamma)+b\cdot(\beta+2\gamma)+c\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$

.... 1p

b) $E(a,b,c)=0=5a+4b+6c$ 1p

Fie $\begin{cases} \beta+4\gamma=5 \\ \beta+2\gamma=4 \\ \alpha+\beta+\gamma=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{5}{2} \\ \beta=3 \\ \gamma=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 2p

c) Dacă unul dintre numerele $f(0), f(1), f(2)$ este zero rezultă că $x_0 \in \{0,1,2\} \subset [0,2]$ 1p

Dacă $f(0), f(1), f(2)$ sunt numere nenule, din $\frac{5}{2}\cdot f(0)+3\cdot f(1)+\frac{1}{2}\cdot f(2)=0$, rezultă că unul dintre numerele $f(0), f(1), f(2)$ are semn contrar celorlalte două, deci ecuația $ax^2+bx+c=0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0,2)$ 2p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația: $x\cdot\left[2+f(x)+f(-x)\right]+2\cdot f(-x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

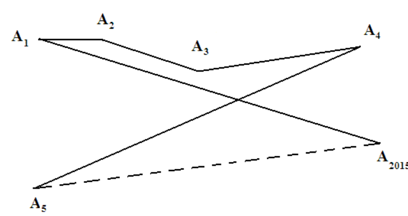
a) Să se demonstreze că *f* este funcție impară.
b) Să se determine funcțiile care verifică relația de mai sus.

Soluție:

a) Dacă $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ 1p
Scriem relația dată punând $-x$ în loc de x 1p
Obținem: $-x\left[2+f(-x)+f(x)\right]+2f(x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$ 1p
Avem: $\begin{cases} x\cdot\left[2+f(x)+f(-x)\right]+2\cdot f(-x)=0 \\ -x\cdot\left[2+f(-x)+f(x)\right]+2\cdot f(x)=0 \end{cases}$ 1p
Adunând membru cu membru cele două egalități obținem:
$f(-x)+f(x)=0\Rightarrow f(-x)=-f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$, deci funcția *f* este impară 2p

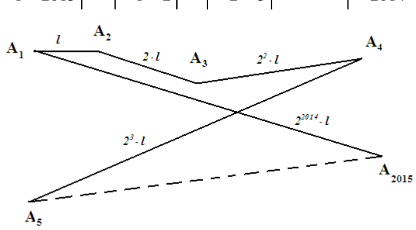
b) Înlocuind în relația din ipoteză avem $x\cdot\left[2+\cancel{f(x)}-\cancel{f(x)}\right]-2\cdot f(x)=0\Rightarrow f(x)=x$ 1p

4. Într-un plan considerăm linia poligonală $\overline{A_1A_2A_3...A_{2015}}$, astfel încât începând cu al doilea segment, fiecare are lungimea de două ori mai mare decât a segmentului precedent. O insectă pleacă din punctul A_1, sărind succesiv în punctele A_2, A_3, A_4, …, A_{2015}. Este posibil ca după un număr finit de sărituri, insecta să se întoarcă în punctul A_1 ?
$\left(\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=2^{2014}\cdot l; l=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\right)$



Soluție:

Fie $\mathrm{dist}(A_1,A_2)=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=l.$ Avem: $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|=2l; \left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|=2^2l; \left|\overrightarrow{A_4A_5}\right|=2^3l;...;\left|\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|=2^{2013}l;$
.... 2p
$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+...+\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}+\overrightarrow{A_{2015}A_1}=\vec{0}$ 1p
$\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|$ 1p
$\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|\le\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|+...+\left|\overrightarrow{A_{2014}A_{2015}}\right|$ 1p



Presupunând că insecta ar putea reveni în A_1, după un număr finit de sărituri, ar trebui să avem:
$2^{2014}\cdot l\le l+2\cdot l+2^2l+...+2^{2013}l\Rightarrow 2^{2014}\le 1+2+2^2+...+2^{2013}$
$\Rightarrow 2^{2014}\le 2^{2014}-1$ (FALS) 2p