INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ şi $\forall k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$.

b) Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a,b \in \mathbb{Z}, a \neq b$, numărul $f(a) - f(b)$ este divizibil cu $a-b$.

c) Argumentați că nu există $g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
$g(2013) = 2014;\ g(2014) = 2015;\ g(2015) = 2013.$

d) Există un polinom $h \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013) = 2013, h(2014) = 2014$ şi $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 şi 2014 ?

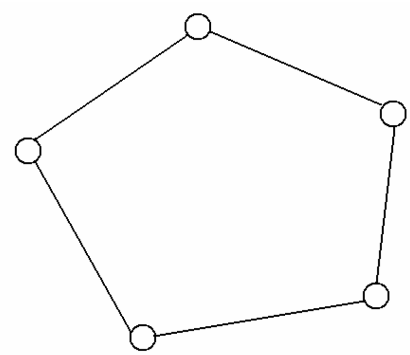
2. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$ şi $g(x) = e^{-x^2}$.

a) Calculați $f'(0); f''(0); f'''(0); f^{(4)}(0)$.

b) Demonstrați că $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $f(x) < 0, \forall x < 0$.

c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *g*, axa *Ox* şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$ este un număr cuprins în intervalul (0,74; 0,75).

3. Avem la dispoziție două culori roşu şi albastru. Notăm cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor colorărilor posibile (roşu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{H}$ şi $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{H}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{H}$ astfel:



i) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de culori diferite, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu roşu;

ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de aceiaşi culoare, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu albastru;

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{H}$;

b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe $\mathcal{H}$.

4. Admitem cunoscut rezultatul:
Dacă $\mathcal{P}$ este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea $\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$, unde $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii $\mathcal{P}$ este punctul $G(x_G, y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

$$x_G=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};\quad y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene $\mathcal{P}$ definită prin $f:[0,\pi]\to[0,1]$, $f(x)=\sin x$, $\mathcal{P}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le f(x)\}$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*