CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $TrA = a + d$, $\det A = ad - bc$.

a) Să se demonstreze că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)\cdot x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $\det(A - I_2) = 2$ şi $\det(A + I_2) = 4$, calculați $\det A$ şi $\det(A - 2I_2)$.

c) Dacă $A^{2014} = O_2$, demonstrați că $A^2 = O_2$.

Soluție.

a) Calcul 2p

b) Folosind pct a) obținem $Tr(A) = 1$ şi $\det(A) = 2$. Rezultă $\det(A - 2I_2) = 4$ 3p

c) Calcul 2p

2. Fie $f : \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$. Să se calculeze:

a) Limitele laterale în punctul $x_0 = 0$.

b) Limitele laterale în punctul $x_0 = -1$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Soluție.

a) $l_s = 0, l_d = \infty$ 3p

b) $l_s = \frac{1}{e}, l_d = -\infty$ 2p

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ 2p

3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie şi coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt $\frac{1}{2}$.

a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?
b) Care este determinantul de valoare minimă ?

Soluție.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$ 3p

a) Valoarea minimă este $\frac{1}{16}$ 3p

b) Determinantul de valoare minimă este cel pentru care $x = \frac{1}{4}$ 1p

4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roşie, patru au culoarea galbenă iar ceilalţi cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii îşi schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu îşi schimbă culoarea. Demonstraţi că:

a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.

b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toţi cameleonii să aibă culoarea verde. (Observaţi că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

<u>Soluţie.</u>

a) Notăm cu R numărul cameleonilor roşii, cu G numărul cameleonilor galbeni şi cu V numărul cameleonilor verzi 1p

În tabelul de mai jos este exemplificată această posibilitate.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
R	3	5	7	9	11	10
G	4	3	2	1	0	2
V	5	4	3	2	1	0

.... 3p

b) Iniţial avem R = 3, G = 4, V = 5.

Dacă se întâlneşte unul roşu cu unul galben, vom avea R = 2, G = 3, V = 7.

Dacă se întâlneşte unul roşu cu unul verde, vom avea R = 2, G = 6, V = 4.

Dacă se întâlneşte unu galben cu unul verde, vom avea R = 5, G = 3, V = 4

.... 1p

Comparăm configuraţia iniţială (3, 4, 5) cu oricare din configuraţiile: (2, 3, 7); (2, 6, 4) sau (5, 3, 4), observăm că doar un număr din oricare configuraţie este multiplu de 3 .... 1p

Dacă ar fi posibil ca la un moment dat toţi să fie verzi, am obţine configuraţia (0, 0, 12) în care toate numerele sunt divizibile cu 3. (fals) 1p