INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Se consideră numărul real $x=\sqrt[5]{100}$.
a) Determinaţi partea întreagă a numărului x.
b) Stabiliţi care este numărul întreg cel mai apropiat de x.
c) Demonstraţi că există o infinitate de numere reale pozitive $a, a\neq 1$ pentru care $\log_a x$ este număr raţional.

Soluţie.
a) Cum $2^5=32<100<243=3^5$, rezultă că $2<x<3$, aşadar $[x]=2$ 2p

b) Trebuie comparate numerele x şi $\frac{5}{2}$, adică 100 şi $\left(\frac{5}{2}\right)^5$, sau $100\cdot 2^5$ şi 5^5. Cum $100\cdot 2^5=3200$ şi $5^5=3125$, deducem că $x>\frac{5}{2}$, prin urmare întregul cel mai apropiat de x este 3 .... 3p

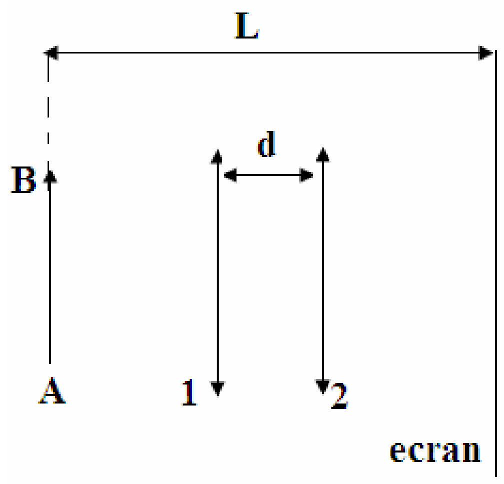
c) Considerând $a=10^r$, cu $r\in\mathbb{Q}^*$, obţinem că $\log_a x=\log_{10^r}10^{\frac{2}{5}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{2}{5}\cdot\lg 10=\frac{2}{5r}\in\mathbb{Q}$ 2p

2. Spunem că un număr complex z este <u>de tip I</u> dacă $\left|z^2+1\right|\leq 1$ şi este <u>de tip II</u> dacă $\left|z+1\right|\leq 1$.
a) Daţi un exemplu de număr complex de tip I care are modulul mai mare decât 1.
b) Demonstraţi că o infinitate de numere complexe de tip II au modulul mai mare decât 1.
c) Demonstraţi că, dacă un număr complex este atât de tip I cât şi de tip II, atunci modulul său este cel mult egal cu 1.

Soluţie.
a) De exemplu, numărul $z=\frac{5}{4}i$ are modulul $|z|=\frac{5}{4}>1$ şi este de tip I: $\left|z^2+1\right|=\left|-\frac{25}{16}+1\right|=\frac{9}{16}<1$
.... 2p
b) Numerele complexe de tip II sunt cele ale căror imagini în planul complex aparţin discului $\mathcal{D}(A,1)$, unde $z_A=-1$. Numerele complexe de modul 1 sunt cele ale căror imagini în planul complex aparţin cercului unitate $\mathcal{C}(0,1)$. Evident, există o infinitate de puncte ale discului $\mathcal{D}(A,1)$ situate în exteriorul cercului $\mathcal{C}(0,1)$ 2p
c) Avem: $2|z|=|2z|=\left|(z+1)^2-(z^2+1)\right|\leq|z+1|^2+\left|z^2+1\right|\leq 1+1=2$, prin urmare $|z|\leq 1$ 3p

3. Măsurarea distanţei focale a unei lentile convergente se poate face prin metoda Bessel, care presupune aşezarea lentilei între un obiect luminos *AB* şi un ecran, considerate fixe, aflate la distanţa *L* unul faţă de celălalt. Se constată că există două poziţii ale lentilei (1 şi 2) pentru care se obţin imagini clare ale obiectului luminos pe ecran, iar cele două poziţii sunt situate la distanţa *d* una faţă de cealaltă.

Aflaţi distanţa focală f a lentilei, funcţie de *L* şi *d*. Se consideră cunoscută formula lentilelor $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$, unde *p* este distanţa de la obiect la lentilă, iar *p*' este distanţa de la lentilă la imaginea obiectului (pe ecran).



Soluţie.

Scriem formula lentilelor pentru poziţiile 1 şi 2 ale lentilei:

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$, respectiv $\frac{1}{p+d}+\frac{1}{p'-d}=\frac{1}{f}$, $p+p'=L$ 2p

Prima relaţie conduce la $Lf=pp'$, iar cea de a doua la $Lf=(p+d)(p'-d)$ 1p

Deducem $pp'=pp'+dp'-dp-d^2$, de unde $p'-p=d$.

Însă $p+p'=L$ şi, de aici, $p=\frac{L-d}{2}$, iar $p'=\frac{L+d}{2}$ 2p

Astfel, $f=\frac{pp'}{L}=\frac{L^2-d^2}{4L}$ 2p

4. Comisia centrală a concursului naţional de matematică "Adolf Haimovici" este formată din cinci membri. Documentele la care lucrează comisia sunt păstrate într-un seif metalic, încuiat cu lacăte diferite. Fiecare dintre membrii comisiei are cheile unor dintre lacăte, astfel încât seiful să poată fi deschis atunci când se întâlnesc cel puţin trei membri ai comisiei şi să nu poată fi deschis de doi sau mai puţini membri.

a) Care este numărul minim de lacăte ale seifului ?

b) Câte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei ?

c) Care este modul de împărţire a cheilor către membrii comisiei ?

Soluţie.

a) Conform enunţului, pentru orice grup de 2 membri trebuie să existe un lacăt a cărui cheie să nu se afle la nici unul dintre ei, dar aceasta să se afle la fiecare dintre cei trei membri absenţi, pentru ca prezenţa oricăruia dintre ei să facă posibilă deschiderea seifului 1p

Aşadar, numărul minim de lacăte este egal cu numărul modurilor în care pot fi formate grupe de câte 2 membri dintre cei 5 ai comisiei 1p

Numărul minim de lacăte este $C_5^2=10$ 1p

b) Pentru fiecare lacăt trebuie să existe 3 chei,

Cum numărul minim de lacăte este 10 trebuie să existe 30 chei 1p

Fiecare membru al comisiei va avea 6 chei 1p

c) Trebuie ca una dintre cele 3 chei al fiecărui lacăt să se afle la orice grup de 3 membri ai comisiei şi ca la fiecare grup de 3 membri să existe un lacăt a cărui cheie să se afle la aceştia şi numai la ei 1p

Astfel seiful nu poate fi deschis de îndată ce nu sunt prezenţi 3 sau mai mulţi membri ai comisiei 1p