CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \text{ sunt numere naturale, prime şi distincte}\right\}$.

a) Demonstrați că orice matrice A din G are determinant nenul.
b) Dacă $B\in G$, arătați că detB este număr impar dacă şi numai dacă suma elementelor matricei B este număr impar.

Mihai Monea şi Steluța Monea

Soluție.

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$. Dacă prin absurd, detA = 0, atunci $a\cdot d = b\cdot c$. Ar rezulta de aici că a divide pe b sau pe c, ceea ce este fals (b şi c sunt prime) 3p

b) Fie $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$; detB $= a\cdot d - b\cdot c$ este impar $\Leftrightarrow$ $a\cdot d$ şi $b\cdot c$ au parități diferite $\Leftrightarrow$ exact unul dintre numerele a, b, c, d este par (mai exact egal cu 2) $\Leftrightarrow$ a + b + c + d este număr impar 4p

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$. Determinați punctele de intersecție dintre graficul funcției f şi asimptota către $-\infty$ la graficul lui f.

Soluție.

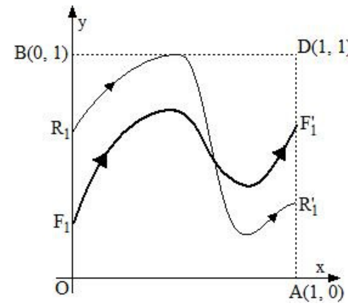
Ecuația asimptotei oblice la G_f spre $-\infty$ este $y=-x+\frac{1}{2}$ 4p

Din $\sqrt{|x^2-x|}=-x+\frac{1}{2}$ obținem că $|x^2-x|=x^2-x+\frac{1}{4}$, cu unica soluție acceptabilă $x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 2p

Punctul de intersecție căutat este $M\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 1p

3. În desenul alăturat sunt evidențiate două trasee continue: unul parcurs de o furnică $F_1 \to F_1'$ şi altul parcurs de o râmă $R_1 \to R_1'$. Arătați că există două puncte, $F(x_F, y_F)$ pe traseul furnicii şi $R(x_R, y_R)$ pe traseul râmei, cu proprietatea $x_R + y_F + y_R = 1 + x_F$.

Lucian-Georges Lăduncă



Soluție.

Traseul furnicii intersectează prima bisectoare cel puțin o dată (teorema de punct fix).

Fie $F(x_F, y_F)$ un astfel de punct, deci $x_F = y_F$ 3p

Traseul urmat de râmă intersectează cel puțin o dată segmentul AB.

Fie $R(x_R, y_R)$ un astfel de punct, deci $y_R = 1 - x_R$ 3p

Atunci $x_R + y_F + y_R = x_R + x_F + 1 - x_R = 1 + x_F$ 1p

4. Fie mulțimea $U = \left\{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = X\right\}$ şi matricea $K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Demonstrați că matricea K nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulțimea U.

Soluție

Fie $X \in U$. Demonstrăm că $trX \in \{0, 1, 2\}$.

$X \in U \Rightarrow X^2 = X$.

Avem două cazuri:

i) Dacă X este inversabilă, atunci prin înmulțire cu X^{-1} a egalității precedente, se obține $X = I_2 \Rightarrow trX = 2$ 2p

ii) Dacă X nu este inversabilă, atunci $\det X = 0$. Din teorema Cayley – Hamilton deducem:

$X^2 - (trX) \cdot X = O_2 \Rightarrow X - (trX) \cdot X = O_2$.

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $(1-a-d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a-d) = 0 \\ d(1-a-d) = 0 \end{cases} \Rightarrow (a+d)[1-(a+d)] = 0 \Rightarrow$

$a+d = tr(X) = 0$ sau $a + d = trX = 1$ 3p

Presupunem prin absurd că $\exists\, X_1, X_2, ..., X_n \in U$ cu proprietatea $K = X_1 + X_2 + ... + X_n \Rightarrow$

$\Rightarrow trK = trX_1 + trX_2 + ... + trX_n$ 1p

Dar $trK = 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $trX_1 + trX_2 + ... + trX_n \in \mathbb{N}$, contradicție 1p