CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XII-a

1. Fie mulţimea $\mathcal{A}$ = {LEU, TIGRU, URS, LUP, IEPURE}. Pe $\mathcal{A}$ definim o lege de compoziţie asociativă, notată ♥, descrisă mai jos:

♥	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE
LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU
TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU
URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS
LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP
IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE

a) Câte legi de compoziţie comutative se pot defini pe $\mathcal{A}$? Se află ♥ printre aceste legi?

b) Legea de compoziţie ♥ are element neutru?

c) Calculaţi $\mathrm{LEU}^{2012} = \underbrace{\mathrm{LEU}\heartsuit\mathrm{LEU}\heartsuit\ldots\heartsuit\mathrm{LEU}}_{2012}$.

d) Rezolvaţi ecuaţia $\mathrm{LEU}\heartsuit\, x\, \heartsuit\mathrm{TIGRU} = \mathrm{IEPURE}$, unde necunoscuta este $x \in \mathcal{A}$.

2. Calculaţi $\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right);1\right\}dx$.

3. Se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=1+x^{n^2-1}+x^{n^2+2n}$, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Notăm cu σ_n aria subgraficului funcţiei f_n.

a) Demonstraţi că $\sqrt{\sigma_n}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}, \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

b) Demonstraţi că $2012,2012<\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}+\ldots+\sqrt{\sigma_{2013}}<2013$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi polinomul $f=X^n-2nX^{n-1}+\left(2n^2-4\right)X^{n-2}+a_3X^{n-3}+\ldots+a_n\in\mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

a) Calculaţi $\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2-n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$.

b) Demonstraţi că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă $n = 2$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*