CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XI a

1. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei d care este asimptotă oblică la graficul funcţiei f.
b) Argumentaţi că funcţia f este convexă.
c) Demonstraţi că aria suprafeţei cuprinsă între dreapta d, graficul funcţiei f, dreptele x = 1 şi x = 2 este mai mică decât $\dfrac{5}{12}$.

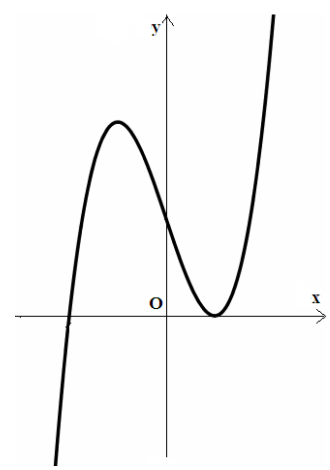
2. a) Demonstraţi că ecuaţia $x^5 - x = m$ are cel mult trei soluţii reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c = d^5 - d$. Demonstraţi că determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ este nul.

3. Pentru fiecare număr natural n se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ n & 1 & n \\ n & n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că nu există niciun număr natural n pentru care matricea A(n) să aibă rangul 2.
b) Se numeşte *pas* următoarea modificare a elementelor unei matrice de tipul A(n): fiecare element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar toate celelalte şase elemente se măresc sau se micşorează cu 1. Stabiliţi dacă este posibil ca, plecând de la A(2), după 2012 astfel de *paşi*, determinantul matricei obţinute să fie egal cu 2012.

4. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^3+bx+c$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată. Demonstraţi că:
a) $8a+2b+c\geq 0$
b) $abc<0$.



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.