CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a X-a

1. Un grup de patru tineri se numeşte *frumos* dacă din grup face parte cel puţin o fată. Stabiliţi câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela şi Horaţiu.

Soluţie:
În echipa de dans sunt 4 fete şi 4 băieţi, deci un grup frumos poate avea în componenţa sa una, două, trei sau patru fete şi restul (până la 4) băieţi. ………………………………………………. 2p
Există $C_4^1 \cdot C_4^3 = 16$ grupuri de patru tineri care conţin câte o fată, ………………….…………… 1p
$C_4^2 \cdot C_4^2 = 36$ grupuri de patru tineri care conţin câte două fete, ……………………………..…. 1p
$C_4^3 \cdot C_4^1 = 16$ grupuri de patru tineri care conţin câte trei fete ………………………….………..…. 1p
şi $C_4^4 \cdot C_4^0 = 1$ grup format din patru fete. ……………………………………………………….. 1p
Numărul total de grupuri frumoase este 69. ……………………………………………………… 1p

2. În plan, considerăm mulţimea $\mathcal{P}$ a tuturor punctelor cu ambele coordonate întregi, precum şi mulţimea $\mathcal{D}$ a tuturor dreptelor care trec prin cel puţin două puncte din $\mathcal{P}$.
a) Demonstraţi că prima bisectoare (dreapta de ecuaţie y = x) aparţine mulţimii $\mathcal{D}$.
b) Demonstraţi că orice dreaptă din mulţimea $\mathcal{D}$ conţine cel puţin 3 puncte din mulţimea $\mathcal{P}$.
c) Demonstraţi că nu există nicio dreaptă oblică *d* în mulţimea $\mathcal{D}$ astfel încât $A(1, \sqrt{2012}) \in d$.

Soluţie:
a) Cum punctele O(0, 0) şi B(1, 1) se află pe prima bisectoare şi aparţin şi mulţimii $\mathcal{P}$, deducem că prima bisectoare aparţine mulţimii $\mathcal{D}$. 2p
b) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ şi $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Se verifică imediat că simetricul punctului M faţă de punctul N este punctul $S(2x_1 - x_0, 2y_1 - y_0) \in d$. 2p
c) Fie $d \in \mathcal{D}$; atunci există $M(x_0, y_0) \in d$ şi $N(x_1, y_1) \in d$, cu $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Deducem imediat că panta dreptei *d* este $m_d = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \in \mathbb{Q}$, iar ecuaţia dreptei este $y - y_0 = m_d(x - x_0)$. 1p
Dacă, prin reducere la absurd, $A(1, \sqrt{2012}) \in d$, atunci $\sqrt{2012} - y_0 = m_d(1 - x_0)$, de unde $\sqrt{2012} = y_0 + m_d(1 - x_0) \in \mathbb{Q}$, contradicţie! 2p

3. Smaranda alege atent un număr natural a, apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x. Dacă unul dintre numerele $A = 10 - \log_2(x^2)$ sau $B = \log_2(16x)$ este cel puţin egal cu a, atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de 3^a lei.
Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a fi sigură că va primi un cadou cât mai valoros?

Soluţie

Din A ≥ a sau B ≥ a, deducem $x \le 2^{\frac{10-a}{2}}$ sau $x \ge 2^{a-4}$ ……………………………………………….. 2p
Pentru a fi sigură că va primi un cadou, Smaranda ar trebui să aleagă un număr a astfel încât $2^{a-4} \le 2^{\frac{10-a}{2}}$, ……………………………………………………………………………………….. 2p
adică $a \le 6$. ……………………………………………………………………………………….. 2p
Cum funcţia $a \mapsto 3^a$ este strict crescătoare, Smaranda ar trebui să aleagă numărul a = 6. ……….. 1p

4. Fie $u = 2012^{3n}$ şi $v = 2012^{2n} \cdot 2011^n + 2012^n \cdot 2011^{2n} + 2 \cdot 2011^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Demonstraţi că există valori ale lui n pentru care $u < v$.
b) Demonstraţi că există valori ale lui n pentru care $u > v$.

Soluţie:
Observăm că

$$\begin{aligned} u - v &= 2012^{3n} - 2011^{3n} - 2011^n \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}) \\ &= (2012^n - 2 \cdot 2011^n) \cdot (2012^{2n} + 2012^n \cdot 2011^n + 2011^{2n}), \end{aligned}$$

unde a doua paranteză este strict pozitivă, indiferent de valoarea lui n. ……………………..…….... 2p
a) Pentru n = 0 avem că $2012^0 - 2 \cdot 2011^0 = -1 < 0$, deci $u < v$. ………………………………… 2p
b) Folosind binomul lui Newton, pentru prima paranteză are loc evaluarea

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = (2011+1)^n - 2 \cdot 2011^n = C_n^1 2011^{n-1} + ... + C_n^n - 2011^n > (n - 2011) 2011^{n-1}.$$

(Altfel, conform inegalităţii lui Bernoulli obţinem că

$$2012^n - 2 \cdot 2011^n = 2011^n \left(\left(1 + \frac{1}{2011}\right)^n - 2 \right) \ge 2011^n \left(1 + \frac{n}{2011} - 2\right).)$$ ……………….... 2p

Pentru n suficient de mare (de exemplu, n = 2012) avem că $u > v$. ……………………………... 1p

<u>**Notă:**</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.