CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $a+b+c=\frac{\pi}{2}$. Demonstraţi că

$$\mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b + \mathrm{tg}b \cdot \mathrm{tg}c + \mathrm{tg}c \cdot \mathrm{tg}a = 1.$$

Soluţie:

Avem că $c=\frac{\pi}{2}-(a+b)$, deci $\mathrm{tg}c=\frac{1}{\mathrm{tg}(a+b)}$ 2p

Rezultă că $\mathrm{tg}c=\frac{1-\mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b}{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}$ 2p

Obţinem că $(\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b)\cdot \mathrm{tg}c = 1-\mathrm{tg}a \cdot \mathrm{tg}b,$ de unde cerinţa problemei 3p

2. În urma unui accident la o fabrică de produse petrochimice, o cantitate de 2 tone de nitraţi a fost deversată într-un râu din apropiere. Concentraţia de nitraţi maxim admisă este de 0,05 mg / ℓ, iar cea măsurată în urma accidentului este de 250 mg / ℓ. Măsurile luate pentru remedierea situaţiei fac aşa încât, în fiecare zi de la contaminare, concentraţia de nitraţi în zona respectivă să scadă la jumătate faţă de ziua precedentă.
a) În câte zile concentraţia de nitraţi scade sub concentraţia maximă admisă?
b) Ştiind că 10% din viaţa activă a zonei moare zilnic din cauza poluării, aflaţi ce procent din populaţia iniţială mai este în viaţă în ziua în care concentraţia de nitraţi reintră în limite normale.

Soluţie:

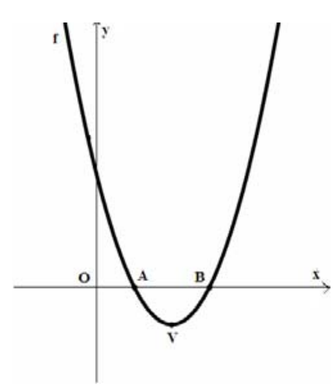
a) După n zile de la accident, concentraţia de nitraţi este $\frac{250}{2^n}$ mg / ℓ 2p

Se impune condiţia $\frac{250}{2^n} \le 0,05$ şi obţinem $n \ge 13$, adică după 13 zile concentraţia de nitraţi scade sub cea maximă admisă 2p

b) După 13 zile, populaţia devine $\left(\frac{9}{10}\right)^{13}$ din cea iniţială 2p

Procentul cerut este de $\left(\frac{9}{10}\right)^{13} \cdot 100\%$ 1p

3. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată.
a) Demonstraţi că, dacă $a\cdot c \ge 4$, atunci $|b| \ge 5$.
b) Determinaţi numărul a în cazul în care punctele A şi B sunt: A(1, 0), respectiv B(3, 0), iar triunghiul AVB are aria egală cu 1.



Soluţie:

a) Parabola intersectează axa Ox în două puncte distincte, aşadar $b^2 > 4ac$ 2p

Obţinem că $b^2 > 16$ şi, cum $b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $|b| \geq 5$ 1p

b) Avem că $x_V = 2 = -\frac{b}{2a}$, prin urmare $b = -4a$ 1p

Din f(1) = 0 deducem că a + b + c = 0, de unde c = 3a 1p

Astfel, $f(x) = a(x^2 - 4x + 3), a \neq 0$. Observăm că $y_V = f(2) = -a$, aşadar aria triunghiului AVB este egală cu $|a| = 1$ 1p

Cum parabola are ramurile în sus, rezultă că a > 0 şi atunci a = 1 .... 1p

4. Numim *placă* un triunghi dreptunghic, împreună cu interiorul său.
Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, demonstraţi că interiorul oricărui patrulater convex poate fi acoperit complet cu n *plăci* care nu se supapun (au interioarele disjuncte).

Soluţie:

Observăm întâi că interiorul oricărui triunghi poate fi împărţit în două triunghiuri dreptunghice, ducând înălţimea din vârful unghiului cel mai mare (precauţie necesară dacă triunghiul iniţial este obtuzunghic) 2p

Dacă $n = 4$, o diagonală împarte interiorul patrulaterului în două triunghiuri, iar după procedeul de mai sus obţinem o acoperire cu 4 plăci 2p

Dacă se poate acoperi patrulaterul folosind k plăci, putem realiza o acoperire cu $k+1$ plăci împărţind una dintre plăci în două cu ajutorul înălţimii corespuzătoare ipotenuzei 3p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.