CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^{-x}$. Notăm $A(n)$ aria mulțimii plane mărginită de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=n$, unde $n\in(1,\infty)$.

a) Calculați $A(n)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)$.

2. Calculați: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot dx$

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t^2}\cdot B$, iar $G=\{M_t \mid t>0\}$.

a) Calculați: $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$

b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.

c) Arătați că $(G,\bullet)$ este un grup abelian.

4. Se dă polinomul cu coeficienți reali $P(x)=x^3+ax^2+bx+c.$

a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi $P(1)=-2$, $P(\sqrt{2})=0$, să se rezolve ecuația $P(x)=0.$

b) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $|a|,|b|,|c|\le 2010$ şi există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $P(x)=0$, să se demonstreze că $x\le 2010.$

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*