CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XI-a

1. Se dau funcțiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + arcsin\, x$ şi

$$g(x) = x\sqrt{1-x^2} - arcsin\, x - 4arctg\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right).$$

a) Calculați $f'(x)$ şi $g'(x)$.

b) Demonstrați că $f(x) = 2\pi + g(x), \forall x \in [0,1]$

2. Un obiect este lăsat să cadă liber; presupunem că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei pe care o atinge obiectul. Timpul t (în secunde) necesar pentru ca obiectul să atingă viteza v (în metri / secundă) este dat de regula $t(v) = \ln\frac{60+v}{60-v}$, $v \in [0,60)$.

a) În cât timp obiectul ajunge de la viteza $v = 0$ m/s până la viteza $v = 27,57$ m/s? ($\ln 2,71 \simeq 1$)

b) Ce viteză atinge obiectul după 3 secunde? ($e^3 \simeq 19,90$)

c) Determinați asimptota verticală a funcției $t = t(v)$.

<u>Notă.</u> În calcule se va considera pentru numărul lui Euler e valoarea aproximativă 2,71, iar numerele vor fi scrise cu două zecimale exacte.

3. În $M_3(R)$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $A^3 = O_3$ şi $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$

b) Calculați $2 \cdot A + 3 \cdot A^2 + 4 \cdot A^3 + ... + 2011 \cdot A^{2010}$

c) Calculați $(I_3 + A)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că $X^n(1) = X(2^n - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*