CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

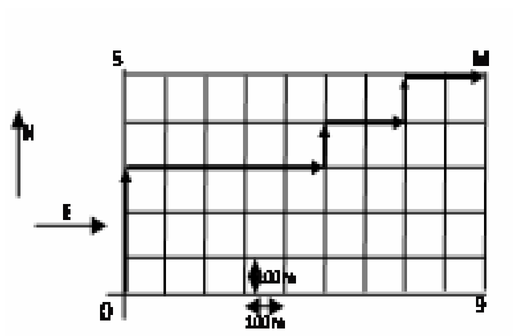
Clasa a X-a

1. Rezolvați ecuațiile:
a) $\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2, x\in\mathbb{R}$;
b) $4^x-9^x=10^x-15^x, x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră ecuația $z^2+2i(\cos a)\cdot z-\cos^2 a=0$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui a pentru care ecuația admite soluția $z=i\cdot\sin a$.

3. a) Demonstrați că $x-y=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$;
b) Demonstrați că $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n

4. În desenul alăturat avem o parte din străzile oraşului New York. Oswald se află în $O(0,0)$ şi doreşte să ajungă cât mai repede la Mary aflată în $M(9,5)$. El trebuie să meargă doar spre nord sau spre est, plecând din O pe o linie poligonală(ca în figura alăturată)



a) Câți metri trebuie meargă spre est (orizontal) şi câți spre nord (vertical) pentru a ajunge în M?
b) În câte moduri poate parcurge astfel Oswald drumul din O în M? (Coordonatele punctului M sunt exprimate în unități de lungime, iar o unitate de lungime este 100 m)

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*