

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII A

1. Fie polinoamele $g, h \in \mathbb{Z}_{19}[X]$, $g = X^{18} - \hat{1}$ și $h = (X - \hat{1})(X - \hat{2})(X - \hat{3}) \dots (X - \hat{18})$.

a) Demonstrați că $\hat{b}^{18} = \hat{1}, \forall b \in \mathbb{Z}_{19}^*$.

b) Arătați că $g = h$.

c) Calculați sumele $\sum_{1 \leq i < j \leq 18} \hat{i} \cdot \hat{j}$ și $\sum_{1 \leq i < j < k \leq 18} \hat{i} \cdot \hat{j} \cdot \hat{k}$.

2. Se dă funcția $\beta: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1} dt$.

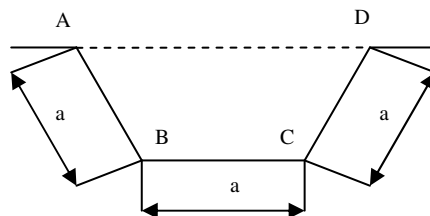
a) Calculați $\beta(2, 2)$ și $\beta(p, 1)$.

b) Folosind schimbare de variabilă $t = 1 - u$, demonstrați că $\beta(p, q) = \beta(q, p), \forall p, q \in \mathbb{N}^*$

c) Deduceți relația de recurență $\beta(p, q) = \frac{q-1}{p} \beta(p+1, q-1), \forall p, q \in \mathbb{N}^*, q \geq 2$.

3. Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t = 0$, b_0 bacterii. S-a observat că funcția $n: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin: $n(t)$ este numărul bacteriilor din vas la momentul t , satisface relația $n'(t) = k \cdot n(t), \forall t \geq 0$ (n' este derivata funcției n , iar k o constantă strict pozitivă, care depinde de mediul de cultură ales). Arătați că, dacă inițial sunt $b_0 = 300$ bacterii iar $k = 0,1$ atunci, pentru $t \geq 20$, numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2010.

4. Din trei scânduri egale cu lățimea a (cm) se face un jgheab a cărei secțiune are forma unui trapez isoscel ABCD, unde $AB + BC + CD = 3a$ (vezi figura de mai jos). La ce valoare a unghiului $\sphericalangle BAD$, suprafața secțiunii jgheabului este maximă ?



Notă: Timp de lucru 3 ore
 Toate subiectele sunt obligatorii
 Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7