CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Demonstrați că, pentru orice număr complex de modul 1, are loc inegalitatea $|2+iz| \le 3$. Când se atinge egalitatea?

Soluția 1.

Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$. Inegalitatea de demonstrat revine la $(2-b)^2 + a^2 \le 9$, deci la $(a^2 + b^2) + 4 - 4b \le 9$, adică $b \ge -1$. 3p

Însă, cum a și b sunt reale, din $a^2 + b^2 = 1$ rezultă că $b^2 \le 1$, de unde $b \in [-1,1]$. 2p

Egalitatea se atinge când $b = -1$. Obținem ca a = 0, astfel că $z = -i$. 2p

Soluția 2.

Din inegalitatea modulului, $|2+iz| \le 2 + |i| \cdot |z| = 3$. 4p

Egalitatea se atinge când numerele complexe 2 și iz au același argument, deci când $\arg z = \frac{3\pi}{2}$. Modulul lui z fiind 1, obținem că $z = -i$. 3p

2. Spunem că un grup format din șase persoane este *aproape unit* dacă orice persoană din grup are exact doi cunoscuți în cadrul grupului. (Presupunem că, dacă A îl cunoaște pe B, atunci și B îl cunoaște pe A.)

a) Arătați că există grupuri de 6 persoane aproape unite care pot fi împărțite în două grupuri de câte trei persoane astfel încât, în cadrul fiecărui grup de trei, toate persoanele să se cunoască între ele.

b) Arătați că există grupuri de 6 persoane aproape unite care pot fi împărțite în două grupuri de câte trei persoane, astfel încât în cadrul fiecărui grup de trei să nu existe perechi de cunoscuți.

Mihai Monea și Steluța Monea, Deva

Soluție.

a) Considerăm un grup format din persoalele A, B, C, D, E și F, în care perechile de cunoscuți sunt $A-B, A-C, B-C, D-E, D-F, E-F$. Un astfel de grup este aproape unit, iar împărțirea (A, B, C); (D, E, F) îndeplinește cerințele. 3p

b) Considerăm un grup format din persoalele A, B, C, D, E și F, în care perechile de cunoscuți sunt $A-D, A-E, B-D, B-F, C-E, C-F$. Un astfel de grup este aproape unit, iar împărțirea (A, B, C); (D, E, F) îndeplinește cerințele. 4p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

3. Pe tablă sunt scrise numerele 2, 0, 1 şi 0. La fiecare pas se măreşte cu 2 cel mai mic dintre numerele aflate pe tablă. (Dacă, la un moment dat, pe tablă sunt mai multe numere egale, se măreşte cu 2 unul dintre ele, la întâmplare.) După câţi paşi apare scris pentru prima dată pe tablă numărul 2010?

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie.

Succesiunea operaţiilor care se efectuează este: 2,0,1,0 $\to$ 2,2,1,0 $\to$ 2,2,1,2 $\to$ 2,2,3,2 $\to$ 4,2,3,2 $\to$ 4,4,3,2 $\to$ 4,4,3,4 $\to$ 4,4,5,4 $\to$ ... $\to$ 2008,2008,2007,2008 $\to$ 2008,2008, 2009,2008 $\to$ 2010,2008,2009,2008. .... 3p

Suma numerelor aflate iniţial pe tablă este 3, iar suma finală este 8035, deci suma numerelor se măreşte cu 8032. Cum la fiecare pas suma se măreşte cu 2, sunt necesari 8032 : 2 = 4016 paşi. 4p

4. Pentru fiecare număr real a, considerăm funcţia $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_a(x)=ax+2-a.$ Notăm cu M_a simetricul originii faţă de graficul funcţiei f_a.

a) Arătaţi că graficele tuturor funcţiilor f_a au un punct comun.

b) Demonstraţi că lungimea segmentului M_aM_b este cel mult egală cu $2\sqrt{5},$ oricare ar fi numerele reale a şi b.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluţie.

a) Cum $f_a(1)=2, \forall a\in\mathbb{R},$ punctul $A(1,2)$ aparţine graficelor tuturor funcţiilor f_a. ……….. 3p

b) Deoarece graficul lui f_a este mediatoarea segmentului OM_a, rezultă că $OA=AM_a$, deci $AM_a=\sqrt{5}, \forall a\in\mathbb{R}$. ………………………………………………………………... 2p

Prin urmare, punctele M_a sunt toate situate pe un cerc de centru A şi rază $\sqrt{5}$; distanţa maximă dintre două astfel de puncte se atinge atunci când ele sunt diametral opuse şi este egală cu $2\sqrt{5}$. 2p