CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Într-un zid având forma unui dreptunghi ABCD cu lungimea AB = 5m şi înălțimea AD = 6m se sparge o fereastră dreptunghiulară MNPQ, cu $MN \parallel AB, MQ \parallel AD$, astfel încât $d(MN, AB) = 2 \cdot d(NP, BC) = 2 \cdot d(PQ, CD) = 2 \cdot d(MQ, AD)$ (prin $d(XY, UV)$ am notat distanța dintre dreptele XY şi UV). Ştiind că suprafața ferestrei este de $3m^2$, determinați dimensiunile acesteia.

Adriana Cațaron, Braşov

Soluție.

Notăm cu x distanța (în metri) dintre dreptele NP şi BC. Dimensiunile ferestrei vor fi $MN = 5 - 2x, MQ = 6 - 3x,$ iar $x \in (0, 2)$. 3p

Problema revine la rezolvarea ecuației $(5 - 2x)(6 - 3x) = 3,$ adică $2x^2 - 9x + 9 = 0$. 2p

Singura soluție admisibilă este x = 1,5, prin urmare MN = 2m, iar MQ = 1,5m. 2p

2. Solubilitatea în apă a unei substanțe în raport cu temperatura este dată de legea $S(t) = at^2 + bt + c$, unde $a, b, c \in (0, \infty)$, S este cantitatea (în grame) de substanță care se poate dizolva în 1000g de apă, iar $t \in [10, 60]$ este temperatura (în grade Celsius) la care se produce dizolvarea.
Experimental, s-au determinat valorile solubilității la câteva temperaturi, anume $S_1 = 10, S_2 = 15, S_3 = 25,$ pentru temperaturile $t_1 = 20, t_2 = 25,$ respectiv $t_3 = 30.$

a) Determinați cantitatea de substanță care se poate dizolva în 1000g de apă la temperatura de 50^o.

b) Arătați că există două temperaturi diferite la care solubilitatea substanței este aceeaşi.

Lucian Dragomir, Oțelu-Roşu

Soluție.

a) Impunem condițiile $S(20) = 10, S(25) = 15, S(30) = 25$ şi, prin rezolvarea sistemului de trei ecuații în necunoscutele a, b şi c care se obține, găsim $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{7}{2}, c = 40$. ……….... 3p

Ajungem aşadar la funcția de gradul al doilea $S : [10, 60] \to \mathbb{R}$, $S(t) = \frac{1}{10}t^2 - \frac{7}{2}t + 40$ şi obținem acum imediat că $S(50) = 115$. ……………………………………………………….. 1p

b) Graficul lui f este o parabolă având abscisa vărfului $x_V = -\frac{b}{2a} = 17,5 \in [10, 60]$. ...…….... 1p

Considerând două valori ale temperaturii simetrice față de x_V, de exemplu $t_1 = 15$ şi $t_2 = 20,$ obținem valori egale ale solubilității. …………………………………………….. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

3. Un elev scrie pe tablă 10 numere naturale consecutive, iar un coleg șterge unul dintre ele. Care sunt numerele scrie de elev, dacă suma numerelor rămase este 2010 ? Ce număr a șters colegul ?

Mihai Ispas, Iași

Soluție.
Fie a cel mai mic număr scris de elev. Pe tablă sunt scrise a; a + 1; a + 2; ... ; a + 9 .... 1p
Fie a + k, ($k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$) numărul șters de coleg.
$a+(a+1)+(a+2)+...+(a+9)-(a+k)=2010 \Rightarrow 9a=k+1965$ 2p
a = 219, k = 6 .... 2p
Numerele sunt: 219, 220, 221, …., 228 .... 1p
Colegul a șters numărul 225 .... 1p

4. Se consideră în plan patrulaterul ABCD.
a) Determinați punctul M din plan pentru care suma MA + MB + MC + MD este minimă.
b) Determinați punctul N din plan pentru care suma $NA^2+NB^2+NC^2+ND^2$ este minimă.
c) Determinați punctul P din plan pentru care modulul vectorului $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ este minim.

Soluție.
a) Cum $MA+MC \geq AC$ (cu egalitate dacă punctele A, M, C sunt coliniare) și $MB+MD \geq$ $\geq BD$ (cu egalitate dacă punctele B, M, D sunt coliniare), suma dată este minimă atunci când M este punctul de intersecție a diagonalelor. 3p
b) Notăm cu E, F, G mijloacele segmentelor AC, BD, respectiv EF. Dacă N este un punct oarecare în plan, folosind teorema medianei în triunghiurile (eventual degenerate) NAC, NBD și NEF, obținem că $NA^2+NB^2+NC^2+ND^2=2\left(NE^2+NF^2\right)+\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right)=$ $=4NG^2+EF^2+\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right)$. Lungimile AC, BD și EF fiind constante, suma dată va fi minimă atunci când NG = 0, deci când N este mijlocul segmentului determinat de mijloacele diagonalelor patrulaterului.. 2p
c) Observăm că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PF},$ iar $\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{PG},$ prin urmare suma din enunț este egală cu $4\overrightarrow{PG}.$ Modulul acestui vector este minim când P = G. …………………. 2p