

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 – 24 mai 2009

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII A

1. Fie M o mulțime nevidă și $*$ o lege de compoziție pe M . Spunem că elementul $d \in M$ se numește *destroyer* pentru operația $*$ dacă $d * x = x * d = d, \forall x \in M$.

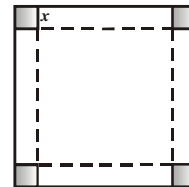
Pentru $a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, fixate, definim pe \mathbb{R} operația $*$ prin

$$x * y = bxy + abx + aby + a^2b - a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că operația $*$ este asociativă și admite element destroyer.

b) Demonstrați că $(-2009a) * (-2008a) * \dots * 0 * a * \dots * (2009a) < 0$.

2. Dintr-o foaie de tablă având forma unui pătrat cu latura de 1 m, se elimină din fiecare colț câte un pătrățel de latură x . Din bucata de tablă rămasă se confecționează o cutie paralelipipedică (fără capac), prin îndoire după liniile punctate. Demonstrați că volumul cutiei obținute nu poate depăși 74,(074) litri și determinați x astfel încât volumul cutiei să fie maxim.



3. a) Demonstrați că funcția $f : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ este convexă și calculați aria subgraficului său.

b) Folosind eventual punctul a), arătați că $\ln 2 < 0,72$.

4. Calculați:

a) $\int \frac{s^3}{s^4 + 1} ds, s \in \mathbb{R};$

b) $I = \int \frac{x^{2000}}{x^{2668} + 1} dx$ și $J = \int \frac{x^{666}}{x^{2668} + 1} dx$, unde $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Nota: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.