CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009
Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE - CLASA A XI A

1. Trebuie rezolvat sistemul a+c=142, c+g=182, g+l=184, l+a=144, unde a, c, g, l sunt masele celor patru boxeri. 2p

Determinantul acestui sistem este $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{vmatrix}=0$. Rangul matricei sistemului este 3, un minor principal fiind $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}$. Minorul caracteristic este $\Delta_c=\begin{vmatrix}1&1&0&142\\0&1&1&182\\0&0&1&184\\1&0&0&144\end{vmatrix}=0$, deci sistemul este compatibil nedeterminat 4p

Informațiile obținute nu sunt suficiente. 1p

2. Fie M(m, m^2) punctul de contact cu parabola a tangentei; ecuația tangentei este $y-m^2=2m\left(x-m\right)$ 2p

Intersecțiile tangentei cu axele sunt $A\left(\frac{m}{2};0\right)$ şi $B\left(0,-m^2\right)$, deci $OA=\frac{1}{2}\cdot|m|$, $OB=m^2$ 2p

Din OA = OB, obținem că $m=\pm\frac{1}{2}$; în ambele cazuri, $AB=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 3p

3. Volumul cutiei obținute este $f\left(x\right)=x\left(1-2x\right)^2=4x^3-4x^2+x$, unde $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. 3p

Cum $f'\left(x\right)=12x^2-8x+1$ este pozitivă pe $\left(0;\frac{1}{6}\right)$ şi negativă pe $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$, înseamnă că funcția f îşi atinge maximul pentru $x=\frac{1}{6}$, volumul maxim al cutiei fiind $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{27}$ m^3. .... 4p

Soluție alternativă: Trebuie să demonstrăm că $f\left(x\right)\le\frac{2}{27}, \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Aceasta revine la a arăta că $4x^3-4x^2+x-\frac{2}{27}\le 0\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\left(x-\frac{2}{3}\right)\le 0, \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, inegalitate care este evident adevărată. Egalitatea se atinge pentru $x=\frac{1}{6}$ 4p

4. Notând cu x elementul de pe linia 1, coloana 2, din condițiile problemei se obține că determinantul este de forma $\begin{vmatrix}1&x&1-x\\1-x&1&x\\x&1-x&1\end{vmatrix}$ 3p

Calculând, obținem pentru determinant valoarea $f\left(x\right)=6x^2-6x+2, x\in\mathbb{R}$; minimul acestei funcții este $f_{min}=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{2}$, atins când $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$. 4p