CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE - CLASA A IX A

1. a) Observăm că $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\left(\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}-3\right):\left(\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}+1\right)=\dfrac{2a_n-6}{6a_n+6}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{1}{3}b_n, \forall n\in\mathbb{N}$,

prin urmare $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o progresie geometrică de rație $q=\dfrac{1}{3}$ 3p

b) Cum $b_0=\dfrac{a_0-3}{a_0+1}=-1$, atunci $b_n=b_0\cdot q^n=-\dfrac{1}{3^n}, \forall n\in\mathbb{N}$ 2p

Din $-\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$, obținem că $a_n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$ 2p

2. Din $\Delta ABM \equiv \Delta ADN$ (I. C.) urmează că BM = DN. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic isoscel CMN, găsim CM = CN = $10\sqrt{2}$ 3p

Notând BM = x, în triunghiul dreptunghic ABM avem că AB = $x+10\sqrt{2}$, AM = 20, prin urmare $20^2=x^2+\left(x+10\sqrt{2}\right)^2$, de unde $x^2+10\sqrt{2}x-100=0$. Singura soluție convenabilă a acestei ecuații este $x=5\sqrt{6}-5\sqrt{2}$, prin urmare AB = $x+10\sqrt{2}=5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ cm 4p

3. Suma pătratelor erorilor este

$f(x)=(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+...+(x_n-x)^2=nx^2-2(x_1+x_2+...+x_n)x+\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$ 4p

Obținem o funcție de gradul al doilea cu coeficientul dominant pozitiv; această funcție admite minim, care se atinge pentru $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ 3p

4. a) Tabla are 13 pătrățele negre şi 12 pătrățele albe; în total, avem 13 · 12 = 156 de vectori 3p

b) Considerând simetria față de centrul tablei, cei 156 de vectori pot fi grupați în 78 de perechi disjuncte formate din vectori opuşi. Rezultă că suma tuturor vectorilor este nulă. 4p