

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. Considerăm $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, unde i este unitatea imaginară.
 - a) Demonstrați că $\mathbb{Q}(i)$ este corp în raport cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a numerelor complexe.
 - b) Corpul astfel obținut este izomorf cu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$?

2. Pentru $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, considerăm $f(x) = -2x^2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-x^2t)(1+x^2t)}$.
 - a) Arătați că $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
 - b) Aflați primitiva lui f al cărei grafic trece prin origine.

3. Știind că $a > 0$ și $c < 0$, stabiliți care este numărul de rădăcini reale ale polinomului $P = X^6 + aX^4 + bX^2 + c \in \mathbb{R}[X]$.

4. Se consideră curba plană de ecuație $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, unde $a, b > 0$.
 - a) Scrieți curba dată ca reuniune a graficelor a două funcții.
 - b) Realizați cuadratura curbei (adică aflați aria suprafeței plane mărginită de curba dată)

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7