

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI**

**Profil real, specializarea științele naturii**

**Clasa a X-a**

1. Pentru  $m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ , considerăm numerele reale

$$x = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \text{ și } y = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m.$$

a) Calculați produsul  $x \cdot y$ .

b) Comparați numerele  $x$  și  $y$ .

2. a) Fie  $a, b$  numere reale pozitive cu suma 1. Arătați că  $a^3 b \leq \frac{27}{256}$ , precizând când se atinge egalitatea.

b) Determinați valoarea maximă a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ , precum și valorile lui  $x$  pentru care se atinge maximumul.

3. a) Demonstrați că  $|\sin nt| \leq n \cdot |\sin t|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$ .

b) Fie  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația  $x^{2008} - 2008x + a = 0$  să aibă o soluție complexă nereală  $\alpha$ ; arătați că  $|\alpha| \geq 1$ .

4. Datorez unui cămătar suma de 10 000 lei, pe care ar trebui s-o plătesc astăzi. Neavând acești bani, obțin posibilitatea de a-i achita în trei tranșe egale, prima trebuind plătită peste două luni, a doua peste cinci luni și ultima peste opt luni. Dobânda este de 10% pe lună, în regim dobândă simplă (se calculează în fiecare lună în raport cu suma inițială). Ce sumă trebuie să plătesc la fiecare dintre cele trei termene?

**Nota:** Timp de lucru 3 ore  
Toate subiectele sunt obligatorii  
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7