CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAŞI

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE - CLASA a XI-a

Subiectul 1.

a) Determinatul sistemului este -2abc, deci nenul; atunci sistemul se poate rezolva cu regula lui Cramer, prin urmare are soluție unică 3p

b) Avem că $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 1p

Faptul că x se află în (-1, 1) revine la $(b+c+a)(b+c-a)>0$ şi $(b-c+a)(b-c-a)<0$, inegalități care rezultă din ipoteza problemei.

La fel se arată că $y\in(-1,1)$, respectiv $z\in(-1,1)$ 3p

(*Soluție alternativă:* din ipoteza problemei deducem că a, b, c pot fi laturi ale unui triunghi şi observăm că x = cosA, y = cosB, z = cosC şi de aici cerința problemei .... 3p)

Subiectul 2.

a) Verificare 2p

b) Se procedează prin inducție matematică 3p

c) $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2^n}\right)=f(0), \forall x\in\mathbb{R}$, prin urmare f este constantă.

Evident, orice funcție constantă are proprietatea din enunț. 2p

Subiectul 3.

Observăm că $d^2=x^2+800$, iar $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+800}}$, prin urmare $I(x)=\frac{kx}{(x^2+800)^{\frac{3}{2}}}, \forall x>0$ 3p

$I'(x)=k\frac{800-2x^2}{(x^2+800)^{\frac{5}{2}}}$, deci $I'(x)$ este pozitivă pe intervalul (0, 20) şi negativă pe $(20,+\infty)$.

Deducem că $x_0=20$ este punct de maxim pentru I 4p

Subiectul 4.

a) Fie M o matrice ce conține cinci elemente egale cu -1, restul fiind 1. Evident că detM este număr întreg, cuprins intre -6 şi 6. Adunând în detM prima linie la liniile 2 şi 3, de pe aceste două linii vom putea da câte un 2 factor comun, deci detM se divide cu 4. Rezultă că $\det M\in\{-4,0,4\}$ şi se găsesc uşor exemple de matrice M în fiecare situație 4p

b) Operațiile efectuate asupra matricelor în cea de-a doua etapă nu modifică determinatul, care va rămâne deci 0, 4 sau -4. Cum detB = 8, deducem că matricea B nu poate fi obținută de Cătălin 3p