CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI
Profil real, specializarea științele naturii
BAREM DE CORECTARE - CLASA a X-a

Subiectul 1.

a) $xy = \left(\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m}{m-1}\right)^m = 1^m = 1$ 3p

b) Dacă m > 1, atunci $1-\frac{1}{m}\in(0,1)$, prin urmare x < 1.

Din xy = 1, deducem că y > 1, deci x < y 2p

Dacă m < 0, atunci $1-\frac{1}{m}>1$, deci $x=\left(1-\frac{1}{m}\right)^m<1$.

La fel obținem că $y>1$, prin urmare $x<y$ 2p

Subiectul 2.

a) $\frac{a^3b}{27}=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot b\le\left(\frac{\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+b}{4}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$, cu egalitate pentru $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}$ 3p

b) Observăm că $f^2(x)=a^3b$, unde $a=\sin^2 x, b=\cos^2 x$ sunt numere reale pozitive cu suma 1. Astfel, $f^2(x)\le\frac{27}{256}$, de unde $f(x)\le\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 2p

Maximul se atinge când $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x=\frac{1}{2}$ sau $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x=-\frac{1}{2}$, deci pentru $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ 2p

Subiectul 3.

a) Procedăm prin inducție matematică. Pentru n = 0, are loc egalitatea.

Presupunând că $|\sin nt|\le n\cdot|\sin t|$, avem:

$|\sin(n+1)t|=|\sin nt\cdot\cos t+\cos nt\cdot\sin t|\le|\sin nt||\cos t|+|\cos nt||\sin t|\le$

$\le n\cdot|\sin t|\cdot 1+1\cdot|\sin t|=(n+1)|\sin t|$ 3p

b) Fie $\alpha=r(\cos t+i\sin t), \text{cu } t\ne k\pi, k\in\mathbb{Z};$ atunci

$\left(r^{2008}\cos 2008t-2008r\cos t+a\right)+i\left(r^{2008}\sin 2008t-2008\sin t\right)=0$ de unde

$r^{2008}\sin 2008t=2008\sin t$ 2p

Dacă, prin absurd, am avea $r<1$, din $r^{2008}\cdot|\sin 2008t|=2008|\sin t|$ am obține că

$2008|\sin t|<|\sin 2008t|$, ceea ce contrazice a) .... 2 p

Subiectul 4.

Fie x valoarea comună a fiecăreia dintre cele trei tranșe, iar a, b, c valorile lor de astăzi.

Avem că $x=a+20\%\cdot a=\frac{12a}{10}, x=b+50\%\cdot b=\frac{15b}{10}, x=c+80\%\cdot c=\frac{18c}{10}$,

iar a + b + c = 10000 .... 4p

Obținem că $\frac{10x}{12}+\frac{10x}{15}+\frac{10x}{18}=10000$, deci $x=\frac{1000}{\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}}=\frac{180000}{37}\simeq 4864,86$ lei 3p