SOLUȚII

Varianta 1

I.

1. 444. **2.** 3052. **3.** 1. **4.** –32. **5.** 10. **6.** 2. **7.** 36. **8.** $2\sqrt{3}$.

II.

9. $3x-6 \leqslant 0 \Rightarrow 3x \leqslant 6 \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow x \in (-\infty; 2]$. *Răspuns B.*

10. $E(x)=(x-7)^2+|4-x| \Rightarrow E(6)=(6-7)^2+|4-6|=(-1)^2+|-2|=1+2=3$. *Răspuns D.*

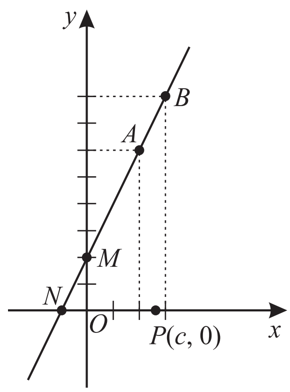
11. Raza cercului circumscris unui hexagon regulat este egală cu latura hexagonului, rezultă $R=6$ cm și deci $L_{\text{cerc}}=2\pi R=12\pi$ cm . *Răspuns A.*

12. Linia mijlocie într-un trapez este egală cu $\frac{B+b}{2}=\frac{10+8}{2}=9$ cm . *Răspuns A.*

III.

13. a) 114, 141, 411, 221, 212, 122.

b) $P(E)=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

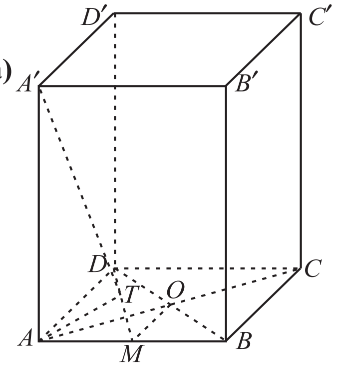


14. a) $\left.\begin{array}{l} f(2)=6 \Rightarrow 2a+b=6 \\ f(3)=8 \Rightarrow 3a+b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2$ și $b=2$.

b) Dreapta *AB* este graficul funcției.

c) Fie ΔMNP dreptunghic în $\widehat{M}$, în care:
$MO \perp NP \overset{\text{TC}}{\Rightarrow} MN^2 = NO \cdot NP$; atunci: $5 = 1(1+c) \Rightarrow c=4$.

15. a)



b) *OM* este linie mijlocie în ΔABC, rezultă $OM \parallel BC$; $BC \perp AB \Rightarrow OM \perp AB$,

$\left.\begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ OM \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \perp OM \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} OM \perp (ABA') \\ A'B \subset (ABA') \end{array}\right\} \Rightarrow OM \perp A'B$.

c) Din $D'D \perp (ABC)$ și $B \in (ABC)$ rezultă că proiecția pe (ABC) a diagonalei $D'B$ este DB, deci $\sphericalangle(D'B; (ABC)) \equiv \sphericalangle D'BD$. În ΔADB: $m(\widehat{A})=90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} DB^2=AD^2+AB^2$, deci $DB=3\sqrt{5}$ cm . Dar $DD'=3\sqrt{5}$ cm , rezultă $\Delta DD'B$ dreptunghic isoscel și atunci $m(\sphericalangle D'BD) = 45°$.

d) În ΔADM isoscel ($AD = AM = 3$ cm), $AA' \perp (ABC)$; ducem $AT \perp DM$, dar $AT, DM \subset (ABC) \overset{T3P}{\Rightarrow} A'T \perp DM$.

Fie $TQ \parallel DD'$, $Q \in D'M$, $DD' \perp DM$ rezultă $TQ \perp DM$.

$(A'DM) \cap (D'DM) = DM$, $A'T \perp DM$, $DQ \perp DM \Rightarrow \sphericalangle((A'DM); (D'DM)) \equiv \sphericalangle A'TQ$.

Fie $TQ \cap (A'B'C') = \{S\}$. Din cele arătate rezultă $\Delta A'ST$ dreptunghic în S, rezultă

$$\left.\begin{array}{l} TS \parallel DD' \\ T \in (ABCD) \\ S \in (A'B'C'D') \end{array}\right| \Rightarrow TS = DD',\ \left.\begin{array}{r} TS \parallel AA' \\ TS = AA' \end{array}\right| \Rightarrow TSA'A \text{ dreptunghi} \Rightarrow A'S = AT = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ cm}.$$

$$\operatorname{tg}\hat{T} = \frac{A'S}{TS} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Varianta 2

I.

1. 78. **2.** 14. **3.** $5\sqrt{2}$. **4.** 5. **5.** 120. **6.** 60. **7.** $8\sqrt{3}$. **8.** 112.

II.

9. $x + \frac{1}{x} = 7 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 49 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$. *Răspuns B.*

10. $f(x) = ax - 3$; dacă $A(2; 3) \in G_f$, atunci $f(2) = 3 \Leftrightarrow 2a - 3 = 3 \Leftrightarrow a = 3$. *Răspuns B.*

11. Simetricul punctului P față de originea axelor este punctul Q astfel încât $PO = OQ$ și P, O, Q coliniare, deci $Q(3; 2)$. *Răspuns C.*

12. Poligonul regulat cu 6 laturi este hexagonul regulat. Masura unui unghi al unui hexagon regulat este de 120. *Răspuns D.*

III.

13. a) Din $\frac{a+b}{2} = 7{,}5$ rezultă $a + b = 15$.

b) Din $\sqrt{ab} = 6$ rezultă $ab = 36$; rezultă $a(15 - a) = 36$, de unde $a^2 - 15a + 36 = 0$ și deci $a = 12$ și $b = 3$, sau invers

$p\%12 = 3 \Rightarrow p = \frac{300}{12} \Rightarrow p = 25$, deci 25% din 12 este 3.

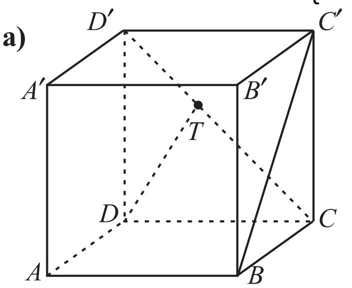
14. a) $(x + 2)(2x - 3) = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + x - 6$.

b) $E(x) = \left(\frac{x-6}{(x-5)(x+5)} + \frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5}\right) \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x-6+x(x+5)-2(x-5)}{(x-5)(x+5)} \cdot$

$$\cdot \frac{(x-5)(x+5)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x-6+x^2+5x-2x+10}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x^2+4x+4}{(x+2)(2x-3)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(2x-3)} = \frac{x+2}{2x-3}$$

c) Din $\dfrac{a+2}{2a-3} \in \mathbb{Z}$ rezultă $2a - 3 \mid a + 2$, de unde $2a - 3 \mid 2a + 4$; dar $2a - 3 \mid 2a - 3$, deci $2a - 3 \mid (2a + 4) - (2a - 3)$, rezultă $2a - 3 \mid 7$, adică $2a - 3 \in \{\pm1; \pm7\}$. Obținem $a \in \{2; 1; 5; -2\}$ și, cum $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm5; \dfrac{3}{2}; -2\right\}$, rezultă $a \in \{1; 2\}$.

15. a)



b) Din $AB \perp (BCC')$, $BC' \subset (BCC')$ rezultă $AB \perp BC'$.

Din $A_{ABC'D'} = AB \cdot BC'$ rezultă $192 = AB \cdot BC'$.

În triunghiul BCC': $m(\widehat{C}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow BC' = \sqrt{BC^2 + C'C^2}$, rezultă $BC' = 24$ cm.

Deci $192 = AB \cdot 24$, rezultă $AB = 8$ cm.

c) În $\Delta A'AB$: $m(\widehat{A}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} A'B^2 = AB^2 + A'A^2$, deci $A'B = 8\sqrt{3}$ cm.

Din $AD \parallel BC$ rezultă $\sphericalangle(A'C; AD) \equiv \sphericalangle A'CB$; $\Delta A'CB$ dreptunghic în B pentru că $BC \perp (ABB')$ și $A'B \subset (ABB')$, rezultă $\mathrm{tg}\widehat{A'CB} = \dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{8\sqrt{3}}{8\sqrt{7}}$, adică $\mathrm{tg}\widehat{A'CB} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

d) $d(D; (A'BC) = d(D; A'BCD')$. Fie $DT \perp D'C$ cu $T \in D'C$; rezultă $DT \subset (DD'C)$, dar $A'D' \perp (DD'C)$, rezultă $A'D' \perp DT$; dar $DT \perp D'C$, rezultă $DT \perp (A'BC)$ și deci $d(D; (A'BC)) = DT = h$ în triunghiul dreptunghic $DD'C$.

Obținem $DT = \dfrac{DD' \cdot DC}{D'C} = \dfrac{8\sqrt{2} \cdot 8}{8\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$ cm.

Varianta 3

I.

1. 81. **2.** $\dfrac{4}{3}$. **3.** 11. **4.** $3^2 \cdot 2$. **5.** 144. **6.** 24. **7.** 100. **8.** 72.

II.

9. $\dfrac{2}{3} : 2^2 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} = 1$. *Răspuns C.*

10. $E(x) = (x+3)^2 - 3 \Rightarrow E(-2) = (-2+3)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$. *Răspuns C.*

11. Punctul comun al funcțiilor $f(x) = 3 - 4x$ și $g(x) = 2x - 21$ se obține rezolvând sistemul:

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 4x = 2x - 21 \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 24 \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = f(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - 4 \cdot 4 \end{cases}$, deci

$P(4; -13)$. *Răspuns B.*

12. $AB + BC + CD = 15 \Rightarrow 2AB + 3 = 15 \Rightarrow AB = 6$. *Răspuns B.*

III.

13. **a)** 120 + 82 – 160 = 42 elevi cunosc ambele limbi.

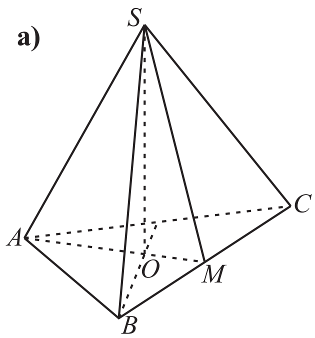
b) 82 – 42 = 40 elevi cunosc numai limba franceză.

14. **a)** $m = 0$ rezultă ecuația $-x = 0$, de unde $S = \{0\}$.

b) $m = -2$ rezultă $-2x^2 - 5x - 2 = 0$, de unde $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$ și $S = \left\{-\dfrac{1}{2}; -2\right\}$.

c) $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4m^2 > 0 \Rightarrow m < \dfrac{1}{4} \Rightarrow m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$.

15. **a)**



b) ΔABC echilateral, AM mediană rezultă $AM \perp BC$.

ΔSBC isoscel, SM mediană, rezultă $SM \perp BC$.

Deci $BC \perp (SAM)$, dar $SA \subset (SAM)$, rezultă $BC \perp SA$. Dar $SA \perp SM$, rezultă $SA \perp (SBC)$ și, cum $SC \subset (SBC)$, rezultă $SA \perp SC$, deci ΔSAC dreptunghic.

c) În ΔSAM dreptunghic în S aplicăm teorema catetei:

$SA^2 = AO \cdot AM$ rezultă $\left(6\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{2}{3} AM \cdot AM$ și deci $AM = 6\sqrt{3}$ cm; rezultă $6\sqrt{3} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, de unde $AB = 12$ cm. Din teorema înălțimii rezultă $SO^2 = AO \cdot OM$, deci $SO^2 = \dfrac{2}{3} AM \cdot \dfrac{1}{3} AM$ și atunci $SO = 2\sqrt{6}$ cm.

$Vol = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{144\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, rezultă $Vol = 72\sqrt{2}$ cm^3.

d) $A'P \perp (ABC)$, $B'Q \perp (ABC)$, $SO \perp (ABC)$ rezultă $A'P \parallel B'Q$; dar A' și B' sunt mijloacele muchiilor SA, respectiv SB, rezultă P mijlocul segmentului AO și Q mijlocul segmentului BO, deci PQ este linie mijlocie în ΔOAB. Rezultă $PQ \parallel AB$ și $PQ = \dfrac{AB}{2}$.

Dacă $CO \cap PQ = \{T\}$, atunci $CT \perp PQ$; $CT = CO + OT = \dfrac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, iar $PQ = 6$ cm; $A_{PQC} = \dfrac{CT \cdot PQ}{2} = 15\sqrt{3}$ cm^2.

Varianta 4

I.

1. 1. **2.** 230. **3.** 10. **4.** 90. **5.** 110. **6.** 8. **7.** 18. **8.** 81.

II.

9. $E(x)=x^2-5x+6+(x+2)(x-3)\Rightarrow E(2)=2^2-5\cdot 2+6+(2+2)(2-3)=$ $=4-10+6+4\cdot(-1)=-4$. *Răspuns C.*

10. Pentru că $\sqrt{3}<\sqrt{5}$, obținem $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, deci $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|+\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}=2\sqrt{5}$. *Răspuns B.*

11. Volumul unui cub cu muchia de 1 dm este 1dm^3; volumul unui cub cu muchia de 3 dm este 27 dm^3; un cub cu volumul de 27 dm^3 cântărește 27 · 7 = 189 kg. *Răspuns C.*

12. *MN* este linie mijlocie în triunghiul echilateral *ABC,* rezultă *BC* = 2*MN* = *AB* = = *AC*, deci perimetrul trapezului *BMNC* este egal cu $5\cdot\frac{15}{2}=75:2=37{,}5$ cm. *Răspuns A.*

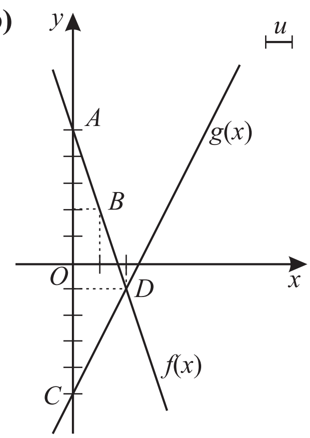
III.

13. **a)** Notăm cu x numărul apartamentelor cu 3 camere și cu y, numărul apartamentelor cu 2 camere. $\begin{cases}3x+2y=76\\x+y=28\end{cases}\Rightarrow$ $x = 20$ și $y = 8$.

b) Din $p\% \cdot 20 = 8$ rezultă $p = 40$, deci 40%.

14. **a)** $f(0) = 5 \Rightarrow A(0;\ 5)$ și $f(1) = 2 \Rightarrow B(1;\ 2)$. Graficul este dreapta *AB*.

b)



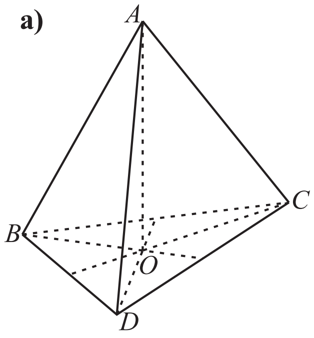
Din $g(0) = -5$ rezultă $G_g \cap Oy = C(0; -5)$.

$G_f \cap G_g$: $f(x) = g(x)$ rezultă $5 - 3x = 2x - 5$, adică $x = 2$ și $f(2) = -1$, deci $D(2; -1)$.

$A_{DAC}=\frac{10\cdot 2}{2}=10u^2$.

c) $s=(2\cdot 3-5)+(2\cdot 4-5)+...+(2\cdot 102-5)$; obținem $s=2(3+4+...+102)-5\cdot 100$, de unde $s=2\cdot\left(\frac{102\cdot 103}{2}-3\right)-500$ și deci $s = 10000$.

15. a)



b) BM și DM mediane în triunghiurile echilaterale ABC, respectiv ADC rezultă $BM \perp AC$ și $DM \perp AC$, rezultă $AC \perp (MBD)$.

c) ΔMBD isoscel. Fie N mijlocul laturii BD; rezultă $MN \perp BD$.

$A_{BMD} = \dfrac{BD \cdot MN}{2}$; $BM = DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ cm.

În ΔMND: $m(\widehat{N}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ cm,

rezultă $A_{BMD} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ cm^2.

d) Fie O centrul bazei BCD, rezultă $AO \perp (BCD)$. Ducem $MP \perp (BCD)$ și, cum $AO \perp (BCD)$, rezultă $MP \parallel AO$ în ΔAOC; dar M mijlocul laturii AC, rezultă MP linie mijlocie și deci $MP = \dfrac{AO}{2}$. În ΔAOB: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} AO^2 = AB^2 - BO^2$; cum

$BO = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, rezultă $AO^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{9} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ cm, deci $MP = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ cm.

Varianta 5

I.

1. 30. **2.** $\dfrac{26}{5}$. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 10. **6.** 48. **7.** 125. **8.** 48.

II.

9. $\dfrac{2x+y}{3x-y} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3(2x+y) = 2(3x-y) \Rightarrow 6x+3y = 6x-2y \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$. *Răspuns C.*

10. $-x+4 > 2 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x \in (-\infty; 2)$. *Răspuns C.*

11. Aria pătratului este 64 cm^2, rezultă că latura pătratului este $\sqrt{64} = 8$ cm, deci perimetrul pătratului este $8 \cdot 4 = 32$ cm. Perimetrul dreptunghiului este $2\ (L + l) =$ $= 2\ (10 + l) = 32 \Rightarrow 10 + l = 16 \Rightarrow l = 6$ cm. *Răspuns B.*

12. Măsura unghiului $DAB = 30°$ pentru că $\sphericalangle DAB$ are același complement, $\sphericalangle DAC$, cu $\sphericalangle ACB$. *Răspuns A.*

III.

13. a) $A + V = 21$ rezultă $A = 21 - V$.

$2(A - 3) = V - 3$, rezultă $2(21 - V - 3) = V - 3$, deci Vlad are 13 ani.

b) Andrei are $21 - 13 = 8$ ani. Peste x ani: $8 + x = \dfrac{2}{3}(13 + x)$, rezultă $x = 2$ ani.

14. a) $\left.\begin{array}{l} f(-1)=4 \Rightarrow -a+b=4 \\ f(2)=-5 \Rightarrow 2a+b=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-3;\ b=1.$

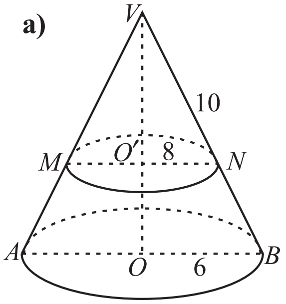
b) $G_f \cap Ox : f(x) = 0$, rezultă $-3x + 1 = 0$, adică $x=\dfrac{1}{3}$, deci $A\left(\dfrac{1}{3};0\right)$.

$G_f \cap Oy : f(0) = y$ rezultă $y = 1$, deci $B(0; 1)$.

$\mathcal{A}_{AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

c) $f(m^2) = m - 3$; $-3m^2 + 1 = m - 3$; $3m^2 + m - 4 = 0$, rezultă $m = 1$ sau $m=-\dfrac{4}{3}$.

15. a)



b) În ΔVOB: $m(\widehat{O})=90^\circ \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} OB=6$ cm.

$Vol_{\text{con}}=\dfrac{\pi R^2 h}{3}=96\pi\ \text{cm}^3$.

c) $\mathcal{A}_{AVB}=\dfrac{AB\cdot VO}{2}=\dfrac{AV^2\cdot\sin\widehat{AVB}}{2}$, rezultă

$\sin\widehat{AVB}=\dfrac{AB\cdot VO}{AV^2}=0{,}96$.

d) $\dfrac{V_{\text{con mic}}}{V_{\text{con mare}}}=\dfrac{1}{27}$. Fie r și h_1 raza, respectiv înălțimea conului mic.

Din Teorema fundamentală a asemănării avem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{h_1}{h}\overset{\text{not}}{=}k$, rezultă $\dfrac{V_{\text{con mic}}}{V_{\text{con mare}}}=$

$=\dfrac{\pi r^2 h_1}{\pi R^2 h}=\left(\dfrac{h_1}{h}\right)^3$, deci $\left(\dfrac{h_1}{h}\right)^3=k^3$. Din $k^3=\dfrac{1}{27}$ rezultă $k=\dfrac{1}{3}$, adică $h_1=\dfrac{8}{3}$, deci distanța este $8-\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}$ cm.

Varianta 6

I.

1. 19. **2.** 2,17. **3.** 30. **4.** 2. **5.** $4\sqrt{3}$. **6.** 8. **7.** 14. **8.** 15.

II.

9. $2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow x\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$. *Răspuns C.*

10. $a=\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}} \Rightarrow a^2=4-\sqrt{15}+2\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}+4+\sqrt{15}=$

$=8+2\sqrt{16-15}=10$. *Răspuns B.*

11. $\dfrac{x\cdot y}{z}=\dfrac{\left(a^2+a\right)\left(a-1\right)}{\left(a^2-1\right)}=\dfrac{a\left(a+1\right)\left(a-1\right)}{\left(a+1\right)\left(a-1\right)}=a$. *Răspuns B.*

12. Ipotenuza este 2 · 4 = 8 cm. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic este jumătate din ipotenuză, adică 4 cm. *Răspuns A.*

III.

13. a) Notăm cu x lungimea întregii autostrăzi.

Primul an: $\frac{1}{4}x$; $\frac{3}{4}x$ au rămas de construit.

Al doilea an: $\frac{60}{100}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{9}{20}x$; $\frac{3}{4}x-\frac{9}{20}x=\frac{3}{10}x$ a rămas de construit.

Al treilea an: 72 km.

$\frac{3}{10}x=72$, deci x = 240 km.

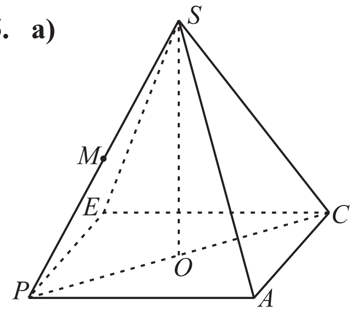
b) În primii doi ani s-au construit $\frac{1}{4}\cdot 240+\frac{9}{20}\cdot 240=168$ km pentru care firma a primit suma de $\frac{168\cdot 2800}{240}=1960$ milioane euro.

14. a) $A(-3; 4)$.

b) $O(0, 0)\in G_f$ și $B(2, 4)\in G_f$, rezultă $f(0) = 0$ și $f(2) = 4$, de unde $b = 0$ și $2a = 4$, deci $a = 2$ și $b = 0$.

c) $A_{OBC}=\frac{OB\cdot \mathrm{d}(C;OB)}{2}=\frac{CO\cdot y_B}{2}\Rightarrow\frac{2\sqrt{5}\cdot \mathrm{d}(C;OB)}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}\Rightarrow \mathrm{d}(C;OB)=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

15. a)



b) $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{144\cdot 6}{3}=288\,\mathrm{cm}^3$.

c) MO linie mijlocie în ΔPSC, rezultă $MO\parallel SC$; $SC\subset(SEC)\Rightarrow MO\parallel(SEC)$.

d) $OA\perp PC$ și $OA\perp SO\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow OA\perp(PSC)\\ \text{ducem } OT\perp SC\\ OT,\ SC\subset(PSC)\end{array}\right\}\overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} AT\perp SC;$$

$$\left.\begin{array}{l}(SPC)\cap(SAC)=SC\\ OT\perp SC\\ AT\perp SC\end{array}\right\}\Rightarrow \sphericalangle((SPC);(SAC))\equiv\sphericalangle OTA.$$

În ΔOTA dreptunghic în $\hat{O}$: $\mathrm{tg}\,\hat{T}=\frac{OA}{OT}=\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\sqrt{3}\Rightarrow \mathrm{m}(\widehat{ATO})=60^\circ$;

$OT=\frac{OS\cdot OC}{CS}=\frac{6\cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$.

În ΔSOC: $\mathrm{m}(\hat{O})=90^\circ\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}SC^2=SO^2+OC^2\Rightarrow SC=6\sqrt{3}$ cm.

Varianta 7

I.

1. 37. **2.** 3002. **3.** 36. **4.** $\frac{11}{16}$. **5.** 12. **6.** $18\sqrt{3}$. **7.** 6. **8.** 120.

II.

9. $2x-5<3x \Rightarrow x>-5 \Rightarrow x\in(-5;+\infty)$. *Răspuns A.*

10. $\frac{7+\sqrt{11}}{x}=\frac{2}{7-\sqrt{11}} \Rightarrow 2x=\left(7+\sqrt{11}\right)\left(7-\sqrt{11}\right) \Rightarrow x=\left(49-11\right):2 \Rightarrow x=19$. *Răspuns C.*

11. Din $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$ și $a+b=90°$ rezultă $5a=b$ și $a+b=90^\circ$, deci $6a=90°$ și $5a=b$ și atunci $a=15°$ și $b=75°$. *Răspuns D.*

12. $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{5}\overset{\text{RTTh}}{\Rightarrow} MN\parallel BC \overset{\text{TFA}}{\Rightarrow} \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{BC}{MN}=6$. *Răspuns A.*

III.

13. a) $A=4^n\cdot(5^2)^n\cdot 5-(2^2)^n\cdot 25^n=100^n\cdot 5-100^n=100^n\cdot 4=(10^n)^2\cdot 2^2 \Rightarrow A=(2\cdot 10^n)^2$.

b) $\sqrt{A}=\sqrt{(2\cdot 10^n)^2}=2\cdot 10^n$ nu se divide cu 10 dacă $n=0$.

14. a) $f(1)=1 \Rightarrow 2m-1+3-m=1 \Rightarrow m=-1$.

b) $f(x)=(-2-1)x+3+1 \Rightarrow f(x)=-3x+4$.

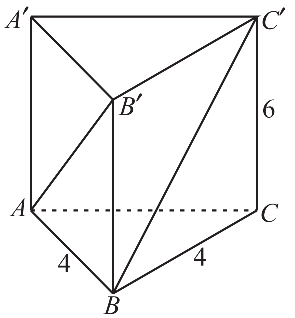
c) $G_f\cap Ox:\ f(x)=0 \Rightarrow -3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3};0\right)$.

$G_f\cap Oy:\ f(0)=y$, rezultă $y=4$, deci $B(0, 4)$.

În ΔCOB: $m(\widehat{O})=90°\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} CB^2=OC^2+OB^2 \Rightarrow CB=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

Raza cercului circumscris este egală cu $\frac{CB}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

15. a)



b) Din $A_{lat}=P_b\cdot h$ rezultă $72=3\cdot 4\cdot h$, deci $h=6$ cm și $AA'=6$ cm.

c) $V_{\text{piramidei}}=\frac{A_b\cdot h}{3}$.

Fie O' centrul bazei $A'B'C'$;

$V_{O'ABC}=\frac{A_{ABC}\cdot O'O}{3}=\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{6}{3}=8\sqrt{3}$ cm³.

d) Prelungim BC cu $MB = BC$; dar $BC \parallel B'C'$ și $BC = B'C'$, rezultă $MB'C'B$ paralelogram, deci $MB' \parallel BC'$ și $MB' = BC'$; rezultă $\sphericalangle(AB', BC') \equiv \sphericalangle AB'M$.

În $\Delta BCC'$: $m(\widehat{C}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} BC' = 2\sqrt{13}$ cm $= MB' = AB'$.

În ΔAMC avem $AB = MB = BC = 4$ cm, rezultă ΔAMC dreptunghic: $m(\widehat{A}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow AM^2 = MC^2 - AC^2$, de unde $AM = 4\sqrt{3}$ cm.

În triunghiul isoscel AMB' ducem $B'P \perp AM$ și obținem

$$A_{AMB'} = \frac{AM \cdot B'P}{2} = \frac{AB' \cdot B'M \cdot \sin\sphericalangle AB'M}{2}.$$

$$\sin\sphericalangle AB'M = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{10}}{52} \Rightarrow \sin\sphericalangle AB'M = \frac{2\sqrt{30}}{13}.$$

În $\Delta B'PM$: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} B'P^2 = MB'^2 - PM^2$, deci $B'P = 2\sqrt{10}$ cm.

Varianta 8

I.

1. 15. **2.** 3. **3.** 12. **4.** 150. **5.** 19. **6.** 8. **7.** 2. **8.** 60.

II.

9. Aria pătratului este l^2, adică $\left(4-\sqrt{5}\right)^2 = 16 - 8\sqrt{5} + 5 = 21 - 8\sqrt{5}$ cm². *Răspuns C.*

10. $f(-3) = -5 \cdot (-3) + 1 = 16$. *Răspuns B.*

11. Fie punctul $C(2; 0)$. În ΔABC cu $m(\widehat{C}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB = 5$ u.m. *Răspuns C.*

12. Aria triunghiului echilateral este: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$ cm^2. *Răspuns A.*

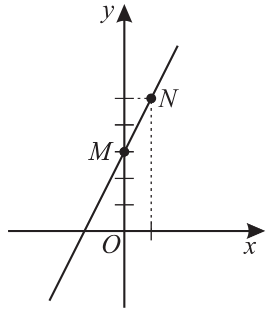
III.

13. **a)** $2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

b) $m = 3c$; $m - 5 = c + 3 \Rightarrow 3c - 5 = c + 3 \Rightarrow c = 4$, deci 4 camioane și 12 microbuze.

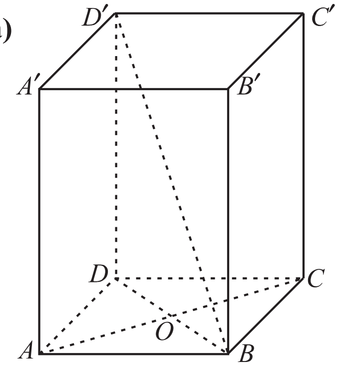
14. **a)** Înlocuind $x = 2$ și $y = 3$ în ecuația $x + y - 5 = 0$ obținem $2 + 3 - 5 = 0$ (A) deci $(2; 3) \in B$.

b) $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow M(0, 3)$; $x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow N(1, 5)$.



c) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \left\{\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right)\right\}$.

15. a)



b) $AD \perp DC$ și $AD \perp DD' \Rightarrow AD \perp (DCC')$; cum $D'C \subset (DCC')$, rezultă $AD \perp D'C$.

c) $D'D \perp (ABC)$ și $B \in (ABC)$ rezultă că proiecția lui $D'B$ pe (ABC) este DB și deci $\sphericalangle(D'B; (ABC)) \equiv \sphericalangle D'BD$;

$m(\sphericalangle DD'B) = 30° \Rightarrow DB = \dfrac{D'B}{2}$; $DB = 5\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow D'B = 10\sqrt{2}$ cm $\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} D'D = 5\sqrt{6}$ cm.

$A_{\text{lat}} = P_{\text{b}} \cdot h \Rightarrow A_{\text{lat}} = 20 \cdot 5\sqrt{6} = 100\sqrt{6}$ cm^2.

d) $AMPC$ trapez, $\{O\} = AC \cap BD$ și O' mijlocul segmentului MP rezultă OO' linie mijlocie și deci $OO' = \dfrac{MA + CP}{2} = 4$ cm.

$BNQD$ trapez și O'' mijlocul segmentului QN rezultă OO'' linie mijlocie și deci $OO'' = \dfrac{BN + DQ}{2} = 4$ cm.

Atunci $OO' = OO''$ și $OO' \perp (ABCD), OO'' \perp (ABCD)$ deci $O' = O''$ și rezultă că dreptele MP și NQ sunt concurente, adică M, N, P, Q coplanare.

Varianta 9

I.

1. 7. **2.** $\dfrac{13}{6}$. **3.** 2. **4.** [0; 3]. **5.** 150. **6.** 48. **7.** 13. **8.** 5.

II.

9. $a = \sqrt{3^4 + 3^5} = \sqrt{3^4(1+3)} = \sqrt{(3^2)^2 \cdot 2^2} = 3^2 \cdot 2$. *Răspuns C.*

10. $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{6}{2,25} \Rightarrow 2x \cdot 2,25 = 3 \cdot 6 \Rightarrow x = \dfrac{18}{2 \cdot 2,25} \Rightarrow x = 4$. *Răspuns D.*

11. Diagonala unui pătrat este $l\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow l = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = \sqrt{6}$ cm. *Răspuns B.*

12. $\text{tg}\,60^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$. *Răspuns A.*

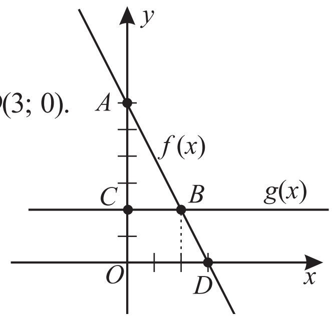
III.

13. a) $x - 20\%x = \dfrac{80}{100}x$ costă după ieftinire;

$\dfrac{80}{100}x + \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{80}{100}x = \dfrac{96}{100}x$ costă după scumpire;

$\dfrac{96}{100}x = 1152 \Rightarrow x = 1200$ lei.

b) După ieftinire aparatul a costat 80% · 1200 = 960 lei.



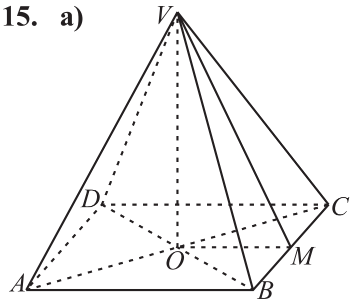
14. a) $f(0) = 6 \Rightarrow A(0, 6)$; $f(2) = 2 \Rightarrow B(2, 2)$;
$g(0) = 2 \Rightarrow C(0, 2)$; $g(2) = 2 \Rightarrow B(2, 2)$.

b) $G_f \cap Ox$: $f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D(3; 0)$.

$$A_{\text{trapez}} = \frac{(BC + OD) \cdot OC}{2} = \frac{(2+3) \cdot 2}{2} = 5.$$

c) $p = 0$ pentru că $f(3) = -6 + 6 = 0$.

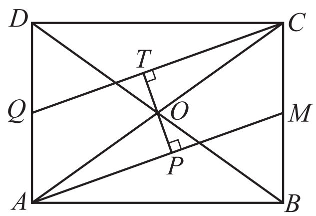
15. a)



b) $A_{\text{lat}} = \dfrac{P_{\text{b}} \cdot a_p}{2} = \dfrac{12 \cdot 4 \cdot 10}{2} = 240$ cm².

În ΔVOM: $m(\widehat{O}) = 90° \Rightarrow VM^2 = VO^2 + OM^2$, deci $VM = 10$ cm.

c) $A_{MND} = A_{ABCD} - A_{AND} - A_{BMN} - A_{MCD} =$
$= 144 - \dfrac{3 \cdot 12}{2} - \dfrac{9 \cdot 6}{2} - \dfrac{6 \cdot 12}{2} = 63$ cm².



d) $\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ \text{ducem } OP \perp AM \\ OP, AM \subset (ABC) \end{array}\right\} \overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} VP \perp AM.$

$(VAM) \cap (ABC) = AM$, $VP \perp AM$, $OP \perp AM \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle((VAM), (ABC)) \equiv \sphericalangle VPO$.

$$\text{tg}\widehat{VPO} = \frac{VO}{OP} = \frac{8}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Fie Q mijlocul $[AD]$; rezultă $AMCQ$ paralelogram. Dacă $OP \perp AM$, atunci PT este înălțimea paralelogramului, unde $OP \cap QC = \{T\}$.

$$A_{AMCQ} = A_{\text{pătrat}} - 2A_{ABM} = 144 - \frac{12 \cdot 6}{2} \cdot 2 = 72 \text{ cm}^2.$$

În ΔAMB: $m(\widehat{B}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AM^2 = AB^2 + BM^2$, deci $AM = 6\sqrt{5}$ cm.

Din $A_{\text{paralel}} = AM \cdot PT$ rezultă $72 = 6\sqrt{5} \cdot PT$, deci $PT = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$ cm și $PO = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

Varianta 10

I.

1. 7. **2.** 5502. **3.** 8. **4.** 40. **5.** –2. **6.** 20. **7.** 60. **8.** 60.

II.

9. Pentru că a are ca factori pe 2 și 8, iar $2 \cdot 8 = 16$, atunci $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 50 + 16 + 1 = 16(1 \cdot 3 \cdot ... \cdot 50 + 2) + 1 = 16k + 1$, deci restul este 1. *Răspuns B.*

10. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1{,}5y = 2 \\ -2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ -2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (-2; 2)$. *Răspuns D.*

11. ΔABC echilateral, rezultă ΔDEF echilateral cu latura $\frac{AB}{2}$, deci raportul de asemănare este $\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare, deci $A_{\Delta DEF} = \frac{A_{\Delta ABC}}{4} = 96 : 4 = 24 \text{ cm}^2$. *Răspuns D.*

12. Unghiurile sunt: x; $x + 10°$; $x + 20°$; $x + 30°$. Cum suma lor este 360°, rezultă $4x + 60° = 360°$, de unde $x = 300° : 4$, deci $x = 75°$. *Răspuns B.*

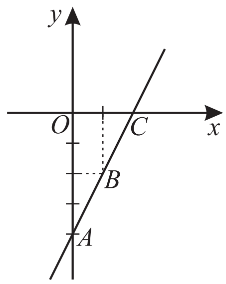
III.

13. a) Cazuri favorabile sunt 26; cazuri posibile sunt 12 + 26 + 36 = 74; $P(E) = \frac{26}{74} = \frac{13}{37}$.

b) Cel mai rău caz este când scot 9 bile albe, 9 bile roșii, 9 bile verzi, adică 27 de bile, deci sigur a 28-a bilă va fi a 10-a bilă de aceeași culoare.

14. a) $f(0) = -4 \Rightarrow A(0; -4)$; $f(1) = -2 \Rightarrow B(1; -2)$.

b) $G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2; 0)$.



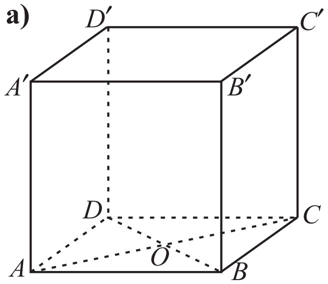
În ΔOCA cu $m(\widehat{O}) = 90°$: $\operatorname{tg}\widehat{OAC} = \frac{OC}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

c) $\left.\begin{array}{l} \frac{2a-4}{a+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1 \mid 2a-4 \\ \text{dar } a+1 \mid a+1, \text{ rezultă } a+1 \mid 2a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 1 \mid (2a - 4) - (2a + 2) \Rightarrow a + 1 \mid 6 \Rightarrow a + 1 \mid 6$.

Cum $a \in \mathbb{N}$, rezultă $a + 1 \in \{1; 2; 3; 6\}$, deci $a \in \{0; 1; 2; 5\}$.

15. a)



b) $A_{tot} = A_{lat} + 2A_b = 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6 + 2 \cdot (6\sqrt{2})^2 =$ $= 144\sqrt{2} + 144 = 144(\sqrt{2}+1)$ cm².

c) Fie $\{O\} = AC \cap BD$; dacă $AE = FC$ și $AO = CO$, rezultă prin diferență $OE = OF$. Cum $OD = OB$, rezultă $DEBF$ paralelogram; dar $EF \perp DB$, deci $DEBF$ romb.

d) $\left.\begin{array}{l}(C'CD) \cap (D'DF) = DD' \\ DF \perp DD' \\ DC \perp DD'\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle((C'CD); (D'DF)) \equiv \sphericalangle FDC$.

Dar ΔFDC isoscel ($DC = CF$) și $m(\widehat{DCF}) = 45°$, rezultă $m(\widehat{CDF}) = \frac{180° - 45°}{2} = 67°30'$.

Varianta 11

I.

1. 49. **2.** $2x$. **3.** $\frac{7}{6}$. **4.** 56. **5.** 60. **6.** 30. **7.** $9\sqrt{3}$. **8.** 5.

II.

9. O variantă de rezolvare! Adunăm 1 la toate elementele mulțimii A și atunci mulțimea A are tot atâtea elemente câte are mulțimea $A' = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ ...;\ 98;\ 100\}$. Dacă împărțim fiecare element al mulțimii A' la 2, obținem elementele 1; 2; 3; ...; 50, care sunt în număr de 50. *Răspuns D.*

10. 10% · 40 + 40 = 44 lei. *Răspuns C.*

11. $BD \perp AD \Rightarrow A_{ABCD}$ = baza · înălțimea = 5 · 12 = 60 cm². *Răspuns B.*

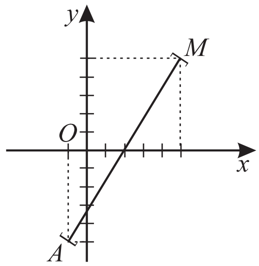
12. $A_{cerc} = \pi R^2$; dar $L_{cerc} = 2\pi R = 6\pi$, rezultă $R = 3$ cm, deci aria este 9π cm². *Răspuns B.*

III.

13. a) $n = 9a + 3$, $n = 18b + 3$, $n = 27c + 3$, rezultă că $n - 3$ este divizibil cu 9, 18 și 27. Atunci cel mai mic $n - 3$ divizibil cu 9, 18 și 27 este c.m.m.m.c al numerelor 9, 18, 27, adică 54, deci cel mai mic n este 57.

b) Următorul $n - 3$ este 54 · 2 = 108, rezultă $n = 111$. Următorul $n - 3$ este 54 · 3 = 162, rezultă $n = 165$. Următorul $n - 3$ este 54 · 4 = 216, rezultă $n = 219$. Următorul $n - 3$ este 54 · 5 = 270 > 250. Obținem $n \in \{111; 165; 219\}$.

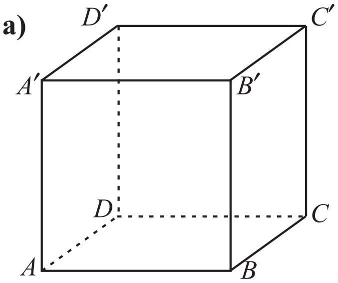
14. a) $f(-1) = -5$ și $f(2) = 1$, rezultă $-a + b = -5$ și $2a + b = 1$, deci $a = 2$ și $b = -3$.



b) $\left.\begin{array}{l} f(4) = 2\cdot 4 - 3 = 5 \Rightarrow M(4;\,5) \\ f(-1) = -5 \Rightarrow A(-1;\,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow G_f = [MA]$.

c) $P(x;\, y)$ cu $x = y$; din $f(x) = y$ rezultă $f(x) = x$, adică $2x - 3 = x$, obținem $x = 3$, deci $P(3;\, 3)$.

15. a)



b) $Vol = L \cdot l \cdot h = 20 \cdot 16 \cdot 15 = 4800$ cm^3.

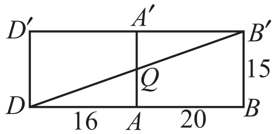
c) $\left.\begin{array}{l} BC \perp (DCC') \\ \text{ducem } CT \perp DC' \\ CT \text{ și } DC' \subset (DCC') \end{array}\right\} \overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} BT \perp DC' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ d$(B;\, DC') = BT$, unde T este piciorul perpendicularei din C pe DC'.

În $\Delta DCC'$: $m(\widehat{C}) = 90° \Rightarrow CT = \dfrac{DC \cdot CC'}{DC'}$ și, cum $DC' = \sqrt{DC^2 + C'C^2}$, rezultă $DC' = 25$ cm și $CT = 12$ cm.

În ΔBTC: $m(\widehat{C}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} BT^2 = TC^2 + BC^2 \Rightarrow BT = 20$ cm.

d) Prin desfășurarea suprafețelor $ABB'A'$ și $ADD'A'$ se obține dreptunghiul din figura alăturată.



$P_{B'QD} = B'Q + QD + B'D$.

Dar $B'D$ este constantă, deci perimetrul este minim când $B'Q + QD$ este minim, adică atunci când B', Q, D sunt coliniare.

$QA \parallel BB' \overset{\text{TFA}}{\Rightarrow} \dfrac{QA}{BB'} = \dfrac{DA}{DB}$, deci $QA = \dfrac{20}{3}$ cm.

Varianta 12

I.

1. 77. **2.** 4. **3.** *a*. **4.** –2. **5.** $9\sqrt{3}$. **6.** 16. **7.** 10. **8.** 4.

II.

9. $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 - 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 0$. *Răspuns D.*

10. $3 \cdot 6 = 18$. *Răspuns C.*

11. $\dfrac{PB}{AM} = \dfrac{AB - AP}{2AP} = \dfrac{4AP - AP}{2AP} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$. *Răspuns C.*

12. $\sphericalangle CMB \equiv \sphericalangle MBA$ (alterne interne); dar $\sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle MBA$, rezultă ΔBCM isoscel, deci $MC = 6$ cm, $DM = DC - MC = 2$ cm. *Răspuns B.*

III.

13. **a)** Fie r suma inițială de bani a lui Radu și a suma inițială de bani a Alexandrei. Din $r + a = 10$ și $r + 1 = a - 6$ obținem $r - a = -7$ și $r + a = 10$, deci $r = 1{,}5$; cartea costă $2(r + 1) = 5$ lei.

b) $a = 10 - 1{,}5 \Rightarrow a = 8{,}5$ lei.

14. **a)** $x^2 - 10x + 21 = x^2 - 7x - 3x + 21 = x(x - 7) - 3(x - 7) = (x - 7)(x - 3)$.

b) $F(x) = \left(\dfrac{2x^2 - 7x - 17}{(x-7)(x-3)} - \dfrac{x+1}{x-7}\right) \cdot \dfrac{(x-3)(x+3)}{1} =$

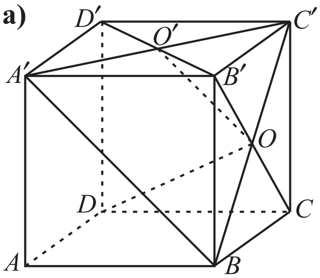
$$= \frac{(2x^2 - 7x - 17 - x^2 + 3x - x + 3)}{(x-7)(x-3)} \cdot (x-3)(x+3) = \frac{(x^2 - 5x - 14)(x+3)}{x-7} =$$

$$= \frac{(x-7)(x+2)(x+3)}{x-7} = (x+2)(x+3).$$

c) $F(a) = (a + 2)(a + 3)$.

a par $\Rightarrow a + 2$ par $\Rightarrow F(a)$ par; a impar $\Rightarrow a + 3$ par $\Rightarrow F(a)$ par.

15. **a)**



b) $\Delta DBC'$ echilateral și DO mediană rezultă

$A_{DBC'} = 2\sqrt{3} = \dfrac{DB^2\sqrt{3}}{4}$, deci $DB = 2\sqrt{2}$ cm și $AB = 2$ cm.

c) $V_{OADD'A'} = \dfrac{A_{ADD'A'} \cdot AB}{3} = \dfrac{4 \cdot 2}{3} = \dfrac{8}{3}\text{cm}^3$.

d) Dacă $A'C' \cap D'B' = \{O'\}$, atunci OO' este linie mijlocie în $\Delta C'A'B$, deci $OO' \parallel A'B$ și $\sphericalangle(DO; A'B) \equiv \sphericalangle O'OD$.

Din $DC \perp (BCC')$ și $OC \subset (BCC')$, rezultă $DC \perp OC \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} DO^2 = DC^2 + OC^2$, de unde $DO = DO' = \sqrt{6}$ cm.

$OO' = \dfrac{A'B}{2} = \sqrt{2}$ cm. Fie $DT \perp O'O$; cum $\Delta DOO'$ isoscel, rezultă $TO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

În ΔDOT cu $m(\hat{T}) = 90^\circ$ avem $\cos\hat{O} = \dfrac{TO}{DO} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Varianta 13

I.

1. 29. **2.** $\dfrac{21}{24}$. **3.** 3. **4.** $\dfrac{2}{3}$. **5.** 74. **6.** 28. **7.** 63. **8.** 94.

II.

9. $7x + 3 = 5 \Rightarrow 7x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{7}$. *Răspuns B.*

10. $ab = \left|\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right| = |2-3| = |-1| = 1$. *Răspuns D.*

11. Raza cercului circumscris dreptunghiului este jumătate din diagonală, adică 4 cm. *Răspuns D.*

12. Fie $BD \perp AC$, cu $D \in AC$. În ΔABD, $\mathrm{m}(\sphericalangle BAD) = 30^\circ \Rightarrow BD = \dfrac{AB}{2} = 3\text{ cm}$.

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = 15\text{ cm}^2$. *Răspuns C.*

III.

13. a) $\dfrac{2\cdot 10+3\cdot 9+6\cdot 8+7\cdot 7+5\cdot 6+1\cdot 5+1\cdot 4}{25} = \dfrac{183}{25} = 7{,}32$.

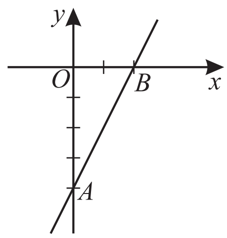
b) $183 - 1 \cdot 4 = 179$; $\quad 7{,}4 = \dfrac{179 + 1\cdot x}{25} \Rightarrow x = 6$.

14. a) $\left.\begin{array}{l} f(1)+f(4) = a+b+4a+b = 5a+2b \\ f(2)+f(3) = 2a+b+3a+b = 5a+2b \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)+f(4) = f(2)+f(3).$

b) $f(x) = 2x - 4$

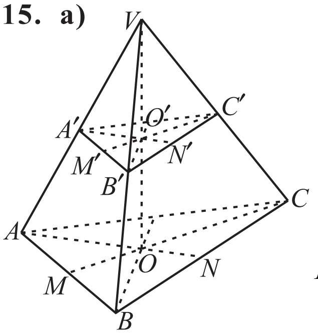
$f(0) = -4 \Rightarrow A(0; -4)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 0)$.



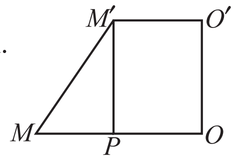
c) Din $f(2m+1) = m^2 + 1$ rezultă $2(2m+1) - 4 = m^2 + 1$, adică $m^2 - 4m + 3 = 0$, deci $m = 1$ sau $m = 3$.

15. a)



b) $OM = \dfrac{1}{3}MC = \dfrac{1}{3}\dfrac{8\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

$O'M' = \dfrac{1}{3}M'C' = \dfrac{1}{3}\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm.



Ducem $M'P \perp MO$, $P \in MO$, rezultă

$MP = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

În $\Delta MM'P$ dreptunghic în P: $M'M^2 = MP^2 + M'P \Rightarrow$

$\Rightarrow M'M = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm; $A_{\text{lat}} = \dfrac{(P_B + P_b)a_p}{2} \Rightarrow A_{\text{lat}} = \dfrac{(24+18)\cdot 7\sqrt{3}}{6} = 49\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

$A_{\text{tot}} = A_{\text{lat}} + A_B + A_b = 49\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 74\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

c) Fie V vârful piramidei:

$\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow \dfrac{VO'}{VO'+4} = \dfrac{6}{8} \Rightarrow 4VO' = 3VO' + 12 \Rightarrow VO' = 12\text{ cm} \Rightarrow VO = 16\ \text{cm}$.

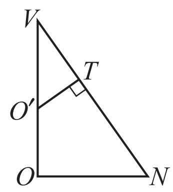
$\text{Vol} = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{16}{3} = \dfrac{256\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$.

d) Fie N mijlocul $[BC]$ și $O'T \perp VN$ cu $T \in VN$; atunci $O'T \subset (VON)$.

Din $BC \perp ON$ și $BC \perp VN$ rezultă $BC \perp (VON)$.

Vom avea $BC \perp O'T$, dar $O'T \perp VN$ și atunci $O'T \perp (BCC')$, deci $d(O'; (BCC')) = O'T$.

$$\Delta VO'T \sim \Delta VNO \Rightarrow \frac{O'T}{ON} = \frac{VO'}{VN} \Rightarrow \frac{O'T}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{12}{\frac{28\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow O'T = \frac{12}{7} \text{ cm.}$$



Fie $VN \cap B'C' = \{N'\}$.

$$\frac{VN'}{VN} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{VN'}{VN' + \frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow VN' = 7\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow VN = \frac{28\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Varianta 14

I.

1. 56. **2.** 20004. **3.** 6. **4.** –2. **5.** 10. **6.** 8. **7.** 180. **8.** 16.

II.

9. Media aritmetică este $\frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2} = \sqrt{2}$. *Răspuns B.*

10. $2 \cdot (-7) - m = 0 \Rightarrow m = -14$. *Răspuns C.*

11. Suma a două unghiuri complementare este 90°, deci măsura unghiului format de bisectoare este 90° : 2 = 45°. *Răspuns D.*

12. Apotema hexagonului regulat este distanța de la centrul poligonului la latura lui. Fie O centrul hexagonului dat; apotema este înălțimea triunghiului echilateral $AOB = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$ cm, deci $AB = 4\sqrt{3}$ cm și atunci $P_{hexagon} = 6AB = 24\sqrt{3}$ cm. *Răspuns A.*

III.

13. a) Fie x prețul inițial al bicicletei.

I $\quad x + 20\%x = \frac{120}{100}x = \frac{6}{5}x$ costă după prima scumpire.

II $\quad \frac{6}{5}x + 10\%\frac{6}{5}x = \frac{33}{25}x$; $\frac{33}{25}x = 264 \Rightarrow x = \frac{264 \cdot 25}{33} \Rightarrow x = 200$ lei.

b) $p\%200 = 264 \Rightarrow p = 132$, deci s-a scumpit cu 32%, de la 200 lei la 264 lei.

14. a) $E(x) = \frac{(x-2)^2 + (x+2)^2 + 2(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{2x}$.

$$E(x) = \frac{x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 + 2x^2 - 8}{2x(x+2)} = \frac{4x^2}{2x(x+2)} = \frac{2x}{x+2}.$$

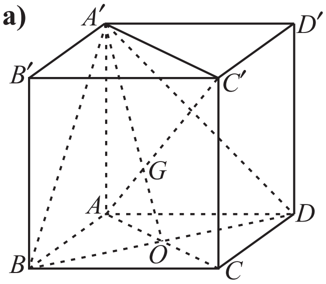
b) $\frac{1}{n}E(n)=\frac{2}{n+2}\in\mathbb{Z}$ rezultă $n+2\in\{\pm1;\pm2\}$, adică $n\in\{-1;-3;0;-4\}$.

Cum $n\in\mathbb{N}^*$, nu există un astfel de n.

$$\left.\begin{array}{r}\textbf{c)}\ \frac{2x}{x+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+2\mid 2x\\ \text{dar } x+2\mid x+2\Rightarrow x+2\mid 2x+4\end{array}\right|\Rightarrow x+2\mid 4\Rightarrow x+2\in\{\pm1;\pm2;\pm4\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in\{-1;-3;0;-4;2;-6\}$. Cum $x\neq 0$, obținem $x\in\{-6;-4;-3;-1;2\}$.

15. a)



b) $\Delta A'BD$ este echilateral pentru că laturile lui sunt diagonale în pătrate congruente, deci

$$A_{A'BD}=\frac{BD^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

c) Fie $OA'\cap AC'=\{G\}$.

$AO\parallel A'C'\Rightarrow\Delta AGO\sim\Delta C'GA'\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{AO}{A'C'}=\frac{OG}{GA'}=\frac{AG}{GC'}\Rightarrow OG=\frac{1}{2}A'G$.

Cum $A'O$ este mediană în $\Delta A'BD$, rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului $A'BD$. Piramidele $AA'BD$ și $C'A'BD$ cu vârful în A, respectiv în C' sunt regulate pentru că au baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente. Cum G este centrul bazei $A'BD$, rezultă $AC'\perp(A'BD)$ în punctul G. Deci $AC'\perp A'O$ în punctul G.

d) $\frac{1}{2}=\frac{AG}{GC'}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{AC'}{GC'}\Rightarrow GC'=\frac{2AC'}{3}=\frac{2\cdot6\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ cm.

$$Vol_{C'A'BD}=\frac{A_{A'BD}\cdot C'G}{3}=\frac{18\sqrt{3}\cdot4\sqrt{3}}{3}=72\text{ cm}^3.$$

Varianta 15

I.

1. 144. **2.** 24. **3.** 9. **4.** 2. **5.** 3000. **6.** 26. **7.** 100. **8.** 500.

II.

9. $G_f\cap Ox=A(-1;0)$ pentru că $f(x)=0\Rightarrow x=-1$; $G_f\cap Oy=B(0;1)$ pentru că $f(0)=1\Rightarrow G_f=AB$. Distanța de la O la AB este înălțime în ΔABO și este egală cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.m. *Răspuns A.*

10. Numerele întregi cuprinse în intervalul închis $[-2;3]$ sunt $-2;-1;0;1;2;3$, iar suma lor este 3. *Răspuns D.*

11. Aria rombului este $\frac{AC \cdot BD}{2} = AD \cdot BE$, unde $BE \perp AD$, cu $E \in AD$, deci $\frac{6 \cdot 8}{2} = AD \cdot BE$. Fie $AC \cap BD = \{O\} \overset{TP}{\Rightarrow} AD^2 = AO^2 + OD^2$; obținem $AD = 5$ cm, deci $BE = \frac{24}{5}$ cm. În $\Delta ABE : \sin(\sphericalangle BAD) = \frac{BE}{AB} = \frac{24}{25}$. *Răspuns D.*

12. Din teorema înălțimii rezultă că înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este egală cu $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$ cm, iar ipotenuza este egală cu 2 + 8 = 10 cm. Aria triunghiului este $\frac{b \cdot h}{2} = 20 \text{ cm}^2$. *Răspuns C.*

III.

13. a) x elevi și y microscoape.

$2(y - 1) + 1 = 3(y - 4) \Rightarrow 2y - 2 + 1 = 3y - 12 \Rightarrow y = 11$ microscoape.

b) $2(11 - 1) + 1 = 21$ elevi.

14. a) $E(x) = \frac{x}{x^2(x+1)} \cdot \frac{2(x+1) \cdot 3(x-1)}{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{6(x-1)}{x^2 - 1} =$

$= \frac{6(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{6}{x(x+1)}$.

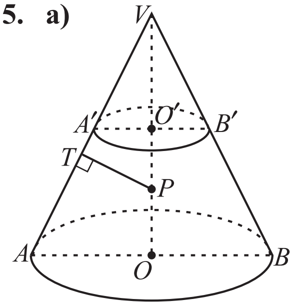
b) $3 + E(2) + E(3) + ... + E(100) = \frac{6}{1 \cdot 2} + \frac{6}{2 \cdot 3} + \frac{6}{3 \cdot 4} + ... + \frac{6}{100 \cdot 101} =$

$= 6\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = 6\left(1 - \frac{1}{101}\right) = 6 \cdot \frac{100}{101} = \frac{600}{101}$.

c) $E(a) = \frac{6}{a(a+1)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(a+1) \mid 6 \Rightarrow a(a+1) \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Cum a și $a + 1$ sunt două numere întregi consecutive obținem $1 \cdot 2 = 2$; $2 \cdot 3 = 6$; $(-2) \cdot (-1) = 2$; $(-3) \cdot (-2) = 6$, deci $a \in \{1; 2; -2; -3\}$. Dar $a \neq 1$, deci $a \in \{-3; -2; 2\}$.

15. a)



b) $A_t = A_l + A_b \Rightarrow 24\pi = 15\pi + A_b \Rightarrow A_b = 9\pi \Rightarrow \Rightarrow \pi R^2 = 9\pi \Rightarrow R = 3$ cm.

c) $A_{lat} = 15\pi = \pi \cdot 3 \cdot G \Rightarrow G = 5$ cm.

În ΔVOB: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} VO^2 = VB^2 - OB^2$, de unde $VO = 4$ cm.

$A'B'$ linie mijlocie, rezultă $OO' = 2$ cm și $r = \frac{3}{2}$ cm.

$V_{tr} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \Rightarrow V_{tr} = \frac{\pi \cdot 2}{3}\left(9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) \Rightarrow V_{tr} = \frac{21\pi}{2} \text{ cm}^3$.

d) Fie $PT = PO$ raza cercului înscris (P este intersecția bisectoarelor).

$\Delta VTP \sim \Delta VOA \Rightarrow \frac{PT}{AO} = \frac{VP}{VA} \Rightarrow \frac{PT}{3} = \frac{4 - PT}{5} \Rightarrow 5PT = 12 - 3PT$, deci $PT = \frac{3}{2}$ cm.

Varianta 16

I.

1. 235. **2.** 3,7. **3.** $\frac{2}{5}$. **4.** 340. **5.** 32. **6.** 60. **7.** $5\sqrt{2}$. **8.** 200.

II.

9. $a^2 - b^2 = 12 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 12 \Rightarrow a - b = 4$. *Răspuns D.*

10. $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$. *Răspuns B.*

11. Aria trapezului este $\frac{(B+b)}{2} \cdot h$, și cum $\frac{B+b}{2}$ este egală cu linia mijlocie a trapezului, rezultă că aria este egală cu 70 cm^2. *Răspuns A.*

12. Triunghiul *BAD* este isoscel cu un unghi de 60°, rezultă că ΔBAD echilateral, deci *AB* = 12 cm; perimetrul este egal cu 12 · 4 = 48 cm. *Răspuns B.*

III.

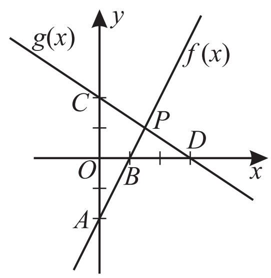
13. a) $\left.\begin{array}{l} x = 15a + 13 \\ x = 30b + 13 \\ x = 45c + 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 13 = 15a \\ x - 13 = 30b \\ x - 13 = 45c \end{array}\right\} \Rightarrow x - 13$ se divide cu 15; 30; 45. Cel mai mic număr diferit de zero divizibil cu 15, 30 și 45 este c.m.m.m.c al lor adică 90, deci $x = 103$.

b) $S = (\underbrace{90 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 90 \cdot 3 + ... + 90 \cdot 10}_{\text{10 termeni}}) + 10 \cdot 13$;

$S = 90(1 + 2 + 3 + ... + 10) + 10 \cdot 13$; $S = 90 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 130 \Rightarrow S = 5080$.

14. a) $f(-3) + g(-3) = -8 + 4 = -4$.

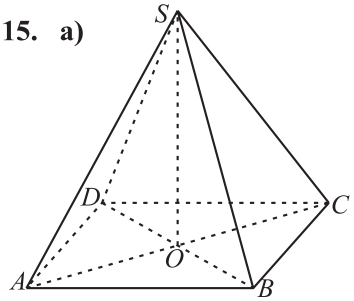
b) $f(0) = -2 \Rightarrow A(0; -2)$; $f(1) = 0 \Rightarrow B(1; 0)$;
$g(0) = 2 \Rightarrow C(0; 2)$; $g(3) = 0 \Rightarrow D(3; 0)$.



c) $A_{ACD} = \frac{CD \cdot d(A; CD)}{2} = \frac{DO \cdot AC}{2}$; dar
$CD = \sqrt{CO^2 + OD^2} = \sqrt{13}$.

Deci $\sqrt{13} \cdot d(A; CD) = 3 \cdot 4 \Rightarrow d(A; CD) = \frac{12\sqrt{13}}{13}$.

15. a)



b) $Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{144 \cdot 6\sqrt{2}}{3} = 288\sqrt{2}$ cm^3.

c) $AC = 12\sqrt{2}$ cm; $AO = 6\sqrt{2}$ cm; $SA = 12$ cm, deci fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale.

Fie $BE \perp SC$; atunci E este mijlocul laturii SC și $DE \perp SC$ și, cum $SC = (SBC) \cap (SDC)$, rezultă $\sphericalangle((SBC);\ (SDC)) \equiv \sphericalangle(DEB)$.

Din OE înălțime și mediană în ΔSOC dreptunghic isoscel rezultă $OE = 6$ cm.

$$A_{DEB} = \frac{DB \cdot OE}{2} = \frac{BE^2 \sin \widehat{DEB}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{DEB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

d) Din $BC \perp SM$ și $BC \perp OM$ rezultă $BC \perp (SOM)$, unde M este mijlocul lui BC. Ducem $PT \perp SM$ cu $T \in SM$; $PT \subset (SOM) \Rightarrow BC \perp PT$ și, cum $PT \perp SM$, rezultă $PT \perp (SBC)$, deci d(P; (SBC)) = PT.

$$\Delta SPT \sim \Delta SMO \Rightarrow \frac{PT}{OM} = \frac{SP}{SM} \Rightarrow \frac{PT}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{12\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow PT = \sqrt{6}\text{ cm.}$$

Varianta 17

I.

1. 310. **2.** 50. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 15. **6.** 60. **7.** 96. **8.** 84.

II.

9. $\frac{3}{4} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. *Răspuns B.*

10. $E(x) = (2x+3)^2 - (2x-3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 12x - 9 = 24x$. *Răspuns C.*

11. Prin teorema lui Pitagora obținem $l^2 = 8^2 + 6^2$, deci $l = 10$ cm. Distanța dintre două laturi opuse este înălțimea rombului. $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = b \cdot h \Rightarrow \frac{16 \cdot 12}{2} = 10 \cdot h \Rightarrow h = 9{,}6$ cm. *Răspuns D.*

12. Suma a două unghiuri suplementare este 180°, deci măsura unghiului format de bisectoare este 180° : 2 = 90°. *Răspuns C.*

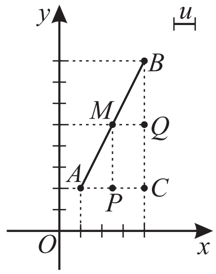
III.

13. a) 16; 25; 36; 49; 64; 81.

b) $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} = \sqrt{10a + b + 10b + a} = \sqrt{11(a+b)} \in \mathbb{N}$ dacă $a + b = 0$ sau $a + b = 11^k$ cu k impar. Dar a și b sunt cifre diferite de zero, deci $a + b = 11$. Cel mai mic astfel de $\overline{ab}$ este 29.

14. a) $G_f = AB \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

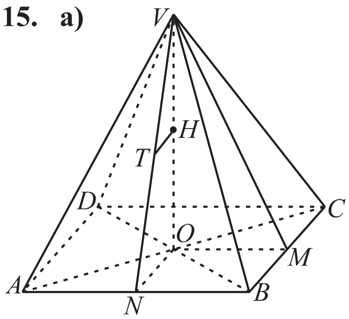
$f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$ și $f(4) = 8 \Rightarrow 4a + b = 8 \Rightarrow a = 2, b = 0$, deci $f(x) = 2x$.



b) Fie $C(4; 2)$. În ΔABC cu $m(\widehat{C}) = 90°$ avem $AC = 3$ și $BC = 6 \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 9 + 36 \Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$.

c) Dacă M este mijlocul segmentului AB și dacă prin M ducem paralele la AC și la BC, ele intersectează în P, respectiv Q, segmentele AC, respectiv BC, atunci MP și MQ sunt linii mijlocii și deci $MQ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3}{2}$ și $MP = \dfrac{BC}{2} = 3$. Deci $M\left(\dfrac{3}{2} + 1; 3 + 2\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{5}{2}; 5\right)$.

15. a)



b) Fie M mijlocul lui $[BC]$ și O centrul bazei; atunci $OM = \dfrac{AB}{2} = 6$ cm.

În ΔVOM: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} VM = 6\sqrt{2}$ cm.

$$A_{lat} = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 144\sqrt{2}\ \text{cm}^2.$$

c) $VO \perp (ABC)$ și $A \in (ABC)$, rezultă că proiecția muchiei VA pe planul bazei este AO, deci $\sphericalangle(VA; (ABC)) \equiv \sphericalangle VAO$.

$AC = 12\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow AO = 6\sqrt{2}$ cm $\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} VA^2 = AO^2 + VO^2 \Rightarrow VA = 6\sqrt{3}$ cm.

În ΔVAO cu $m(\widehat{O}) = 90°$, $\cos\widehat{A} = \dfrac{AO}{VA} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Fie N mijlocul laturii AB și $HT \perp VN$ cu $T \in VN$.

Din $AB \perp NO$ și $AB \perp VN$ rezultă $AB \perp (VNO)$; dar $HT \subset (VNO) \Rightarrow AB \perp HT$ și, cum $HT \perp VN$, rezultă $HT \perp (VAB)$, deci $d(H; (VAB)) = HT$;

$$\Delta VTH \sim \Delta VON \Rightarrow \frac{HT}{ON} = \frac{VH}{VN} \text{ și obținem } HT = \frac{3 \cdot 6}{6\sqrt{2}}, \text{ adică } HT = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}.$$

Varianta 18

I.

1. 12. **2.** 15. **3.** 162. **4.** $\dfrac{1}{6}$. **5.** 32. **6.** 12. **7.** 288. **8.** 70.

II.

9. $M(x; y) \in G_f \Rightarrow f(x) = y$. Deoarece $f(1) = -5$ rezultă $M(1; -5)$. *Răspuns D.*

10. Ecuația este echivalentă cu $x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0$, deci S = {−1}. *Răspuns C.*

11. Dacă un unghi este de 60°, atunci rombul este format din două triunghiuri echilaterale. Diagonala mare a rombului este formată din două înălțimi ale triunghiului echilateral cu latura de 15 cm. Diagonala mare este egală cu $2\cdot\frac{l\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$ cm. *Răspuns B.*

12. Din teorema lui Pitagora rezultă că ipotenuza este egală cu $\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$ cm. Raza cercului circumscris triunghiului dreptunghic este jumătate din ipotenuză, deci 6,5 cm. *Răspuns C.*

III.

13. a) $\sqrt{\frac{900}{50}}^{\,2}-\left(3\sqrt{10}-2\sqrt{10}\right)^2=18-10=8$.

b) $s=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2006}{2007}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2006}{2007}\right)$;

$s=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2006}{2007}-1-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\ldots-\frac{2006}{2007}$; $s=-1$.

14. a) $|x-1|=1 \Rightarrow x-1=1$ sau $x-1=-1 \Rightarrow x=2$ sau $x=0 \Rightarrow S=\{0;\,2\}$.

b) $|x|\leqslant 2 \Rightarrow S=\{\pm 2;\,\pm 1;\,0\}$.

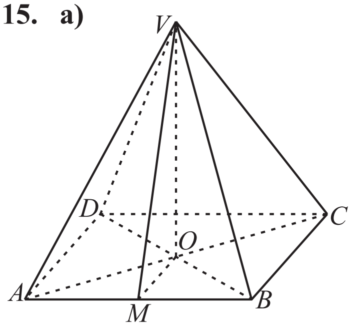
c) $x=0 \Rightarrow |-y|<2 \Rightarrow |y|<2 \Rightarrow (0;\,-1);\ (0;\,1);\ (0;\,0)$.

$x=2 \Rightarrow |2-y|<2 \Rightarrow 2-y=-1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (2;\,3)$

$2-y=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (2;\,1)$

$2-y=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (2;\,2)$.

15. a)



b) $A_{tot}=A_{lat}+A_b=\frac{P_b\cdot a_p}{2}+A_b$.

Fie M mijlocul laturii $[AB]$, deci $OM=6$. În ΔVOM cu $m(\widehat{O})=90°$ obținem $VM=10$ cm.

$A_{tot}=\frac{12\cdot 4\cdot 10}{2}+144=384$ cm².

c) În ΔVOA: $m(\widehat{O})=90° \overset{TP}{\Rightarrow} VA^2=VO^2+AO^2$, de unde $VA=2\sqrt{34}$ cm.

$A_{BVD}=\frac{VO\cdot BD}{2}=\frac{BV\cdot DV\cdot\sin\widehat{BVD}}{2} \Rightarrow \sin\widehat{BVD}=\frac{8\cdot 12\sqrt{2}}{136}=\frac{12\sqrt{2}}{17}$.

d) $\left.\begin{array}{l} AB \perp VM,\ AB \perp OM \Rightarrow AB \perp (VOM) \\ \text{Ducem } HT \perp VM,\ T \in VM \Rightarrow HT \subset (VOM) \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp HT.$

$HT \perp VM$ și $HT \perp AB \Rightarrow HT \perp (VAB) \Rightarrow \mathrm{d}(H; (VAB)) = HT$.
$VO \perp (ABC)$, $H \in VO \Rightarrow \mathrm{d}(H; (ABC)) = HO$.
$\Delta VHT \sim \Delta VMO \Rightarrow \dfrac{HT}{MO} = \dfrac{VH}{VM}$ și atunci $\dfrac{HT}{6} = \dfrac{8 - HT}{10} \Rightarrow HT = 3$ cm.

Varianta 19

I.
1. 20. **2.** 0,2. **3.** 4. **4.** 1500. **5.** 2. **6.** 6. **7.** 15. **8.** 10.

II.
9. $4x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow S = \{-1\}$. *Răspuns D.*

10. 3 muncitori.................................10 ore
6 muncitori..................................x ore

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{x}{10}$, fiind inversă proporționalitate, deci $x = 5$ ore. *Răspuns A.*

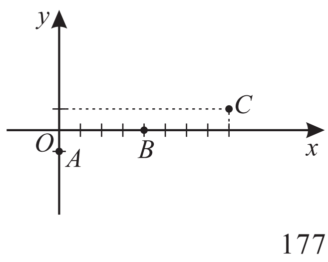
11. Prin teorema lui Pitagora obținem $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 12$ cm. Fie $AD \perp BC$ cu $D \in BC$; atunci proiecția laturii AC pe BC este CD și din teorema catetei obținem $AC^2 = BC \cdot CD$, adică $144 = 20 \cdot CD \Rightarrow CD = 7{,}2$ cm. *Răspuns C.*

12. $(\sin 30° + \cos 30°) \cdot (\cos 60° - \sin 60°) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$.
Răspuns B.

III.
13. a) $a + b = 156$.
$\dfrac{a+24}{b-32} = 1 \Rightarrow a - b = -56$ și, cum $a + b = 156$, obținem $2a = 100$, adică $a = 50$ și $b = 106$.

b) $m_{ap} = \dfrac{50 \cdot 3 + 106 \cdot 2}{3+2} = 72{,}4$.

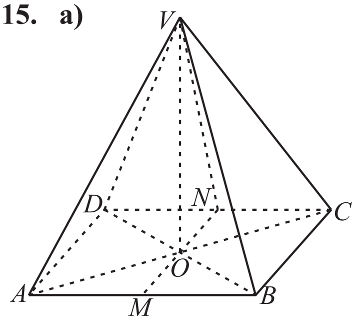
14. a) $f(0) = -1 \Rightarrow A(0; -1)$; $f(4) = 0 \Rightarrow B(4; 0)$; $f(8) = 1 \Rightarrow C(8; 1)$. Deci $G_f = \{A; B; C\}$.



b) $f(4) \neq -1$, $f(8) = 1$ și 12 nu aparține domeniului de definiție al funcției, deci doar $N \in G_f$.

c) $\frac{1}{4}x-1>2x-8 \Rightarrow x-4>8x-32 \Rightarrow x<4$; cum $x \in \{0; 4; 8\}$, rezultă $x = 0$.

15. a)



b) Fie M mijlocul lui $[AB]$. Cum ΔVAB este echilateral, rezultă $VM = \frac{6\sqrt{3}}{2}$, deci $VM = 3\sqrt{3}$ cm.

$A_{lat} = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$; $A_{lat} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ cm².

c) Cum $DB = 6\sqrt{2}$, $VD = VB = 6$, rezultă $DB^2 = VD^2 + VB^2$, deci ΔVDB dreptunghic în V.

d) $(VAB) \cap (VDC) = d$, unde $V \in d$ și, cum $AB \parallel DC$, rezultă $d \parallel AB$ și $d \parallel DC$. Fie N mijlocul lui $[DC]$; atunci $VN \perp DC$, dar $VM \perp AB$. Rezultă că $VM \perp d$ și $VN \perp d$. Deci $\sphericalangle((VAB); (VDC)) \equiv \sphericalangle MVN$.

În ΔVOA: $m(\hat{O}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} VO^2 = VA^2 - AO^2$, rezultă $VO = 3\sqrt{2}$ cm.

$$A_{VMN} = \frac{VO \cdot MN}{2} = \frac{VM \cdot VN \cdot \sin(\widehat{MVN})}{2} \Rightarrow \sin(\widehat{MVN}) = \frac{VO \cdot MN}{VM^2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 6}{(3\sqrt{3})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{MVN}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Varianta 20

I.

1. 5. **2.** 1,8. **3.** $6\sqrt{2}$. **4.** 6. **5.** 500. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.** 3. **8.** 36.

II.

9. $f(x) = 2x - 3$ și $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow C(1;-1) \in G_f$. *Răspuns C.*

10. $E(x) = x^4 - 1 + x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^4 + 2x^2 \Rightarrow E(\sqrt{3}) = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 24$. *Răspuns A.*

11. $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{7} = \frac{m(\sphericalangle AOC)}{6} = \frac{m(\sphericalangle BOC)}{5} = \frac{m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOC)}{7+6+5} =$ $= \frac{360°}{18} = 20°$, deci cel mai mic unghi din cele trei este m($\sphericalangle BOC$) = 100°. *Răspuns A.*

12. Într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză, deci ipotenuza este de 10 cm. Aria triunghiului este $\frac{b \cdot h}{2} = 20$ cm^2. *Răspuns D.*

III.

13. a) 17% din $200 = \dfrac{17 \cdot 200}{100} = 34$ persoane.

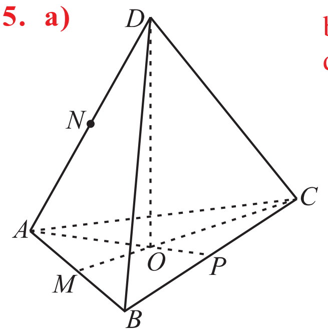
b) Peste 60 de ani: (100% – 13% – 17% – 57%) · 200 = 13% 200, deci probabilitatea este $\dfrac{13}{100}$.

14. a) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$, deci $S = \{1; 3\}$.

b) $\dfrac{n^2+4n+3}{n+3} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{n+3} = n+1$ și cum $n + 1 \in \mathbb{N}$ rezultă $\dfrac{n^2+4n+3}{n+3} \in \mathbb{N}$.

c) $\dfrac{(x+2)^2}{(x-3)^2} \cdot \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} \cdot \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

15. a)



b) Costruim AM ⊥ BC și obținem triunghiul DMB, dreptunghic în M.

$$\left.\begin{array}{l} DA = DB = 5 \\ BM = \dfrac{BC}{2} = 4 \end{array}\right\} \overset{T.P.}{\Rightarrow} DM = 3$$

$$A_t = A_l + A_b = \frac{24 \cdot 3}{2} + \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36 + 16\sqrt{3} =$$

$$= 4\left(9 + 4\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$

c) *MN* linie mijlocie în Δ*ABD* rezultă *MN* ∥ *DB*, deci ∢(*MN*, *DC*) ≡ ∢*BDC*.

Fie *P* mijlocul lui [*BC*]. În Δ*DPB*: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} DP^2 = DB^2 - BP^2$ și atunci *DP* = 3 cm.

$A_{BDC} = \dfrac{DB \cdot DC \cdot \sin\widehat{BDC}}{2} = \dfrac{DP \cdot BC}{2}$, deci $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{3 \cdot 8}{25} = \dfrac{24}{25}$.

d) Din *MN* ∥ *DB* și *DB* ⊂ (*DBC*) rezultă *MN* ∥ (*DBC*), deci proiecția segmentului *MN* pe planul (*DBC*) este un segment *M′N′* congruent cu *MN* și rezultă *M′N′* = 2,5 cm.

Varianta 21

I.

1. 17. **2.** 4. **3.** $\dfrac{11}{29}$. **4.** 5. **5.** 18. **6.** 144. **7.** 6. **8.** $\dfrac{16}{3}$.

II.

9. $m_g = \sqrt{ab}$; $a = \left|1+\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2}$ pentru că $1+\sqrt{2}$ este pozitiv, $b = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$ pentru că $1-\sqrt{2}$ este negativ, deci $m_g = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2-1} = 1$. *Răspuns B.*

10. $3x+9-2x-10=4 \Rightarrow x=5$. Înlocuim pe x cu 5 în ecuația a II-a: $a\cdot 5+4=a \Rightarrow a=-1$. *Răspuns B.*

11. Simetricul punctului M față de originea axelor este punctul M', astfel încât $MO = OM'$ și M, O, M' coliniare, deci $M'(-3; -4)$. *Răspuns C.*

12. Din teorema lui Pitagora rezultă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $BC = 10$ cm .
$\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=\dfrac{AC}{BC}+\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{8}{10}+\dfrac{6}{10}=\dfrac{7}{5}$. *Răspuns D.*

III.

13. a) $2 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 6 = 15{,}6$; $50 - 15{,}6 = 34{,}4$; deci persoana primește 34,4 lei.

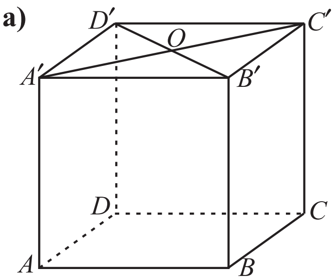
b) $\left.\begin{array}{l}2 \text{ cărți} \cdot 6 \text{ lei} = 12 \text{ lei}\\ 8 \text{ caiete} \cdot 1{,}8 \text{ lei} = 14{,}4 \text{ lei}\end{array}\right\}$ rezultă că prețul minim este 26,4 lei.

14. a) $x^2=\dfrac{1}{9} \Rightarrow x \in \left\{\pm\dfrac{1}{3}\right\}$.

b) $(x + 1)(1 - 3x) = x + 1 - 3x^2 - 3x = 1 - 2x - 3x^2$.

c) $E(x)=\dfrac{7x-3x^2}{(1-3x)(1+3x)}-\dfrac{3x}{(x+1)(1-3x)}\cdot(1+x)=\dfrac{7x-3x^2-3x(1+3x)}{(1-3x)(1+3x)}=$
$=\dfrac{7x-3x^2-3x-9x^2}{(1-3x)(1+3x)}=\dfrac{4x-12x^2}{(1-3x)(1+3x)}=\dfrac{4x(1-3x)}{(1-3x)(1+3x)}=\dfrac{4x}{1+3x}$.

15. a)



b) $AC \parallel A'C'$, $A'D \parallel B'C$, iar $A'C' \cap A'D = \{A'\}$ și $B'C \cap AC = \{C\}$, rezultă $(ACB') \parallel (A'C'D)$.

c) $A'C' \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(CD; A'C') \equiv \sphericalangle DCA$.
$m(\widehat{DCA}) = 45°$.

d) $\left.\begin{array}{l}BA'=BC'=BD=4\sqrt{2}\text{ cm}\\ \Delta A'C'D \text{ echilateral}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$BA'C'D$ piramidă triunghiulară regulată.

Dacă $BT \perp (A'DC')$, atunci T este centrul de greutate al triunghiului $A'C'D$.

$A'C' \cap B'D' = \{O\} \Rightarrow OT=\dfrac{1}{3}DO=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

În $\Delta OBB'$: $m(\widehat{B'})=90° \overset{TP}{\Rightarrow} OB^2=OB'^2+B'B^2$, de unde $OB=2\sqrt{6}$ cm.

În ΔBTO: $m(\widehat{T})=90° \overset{TP}{\Rightarrow} BT^2=OB^2-OT^2$, de unde $BT=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.

Varianta 22

I.

1. 207. **2.** {–1; 0}. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** 0. **5.** 43. **6.** 11. **7.** 27. **8.** 200.

II.

9. $124 = 2^2 \cdot 31$, deci divizorul este 31. *Răspuns A.*

10. $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. *Răspuns C.*

11. Dacă un romb are un unghi de 60°, atunci el este format din două triunghiuri echilaterale, deci latura rombului (l) are 12 cm; $A_{\text{romb}} = 2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. *Răspuns B.*

12. $AB \parallel CD$, deci distanța de la M la AB este egală cu distanța de la C la AB, adică 4 cm; $A_{\Delta MAB} = \frac{AB \cdot BC}{2} = 12\ \text{cm}^2$. *Răspuns C.*

III.

13. **a)** $o + d + v = 26 \Rightarrow 2d + 12 = 26 \Rightarrow d = o = 7$, deci Dana și Oana au 7 ani.

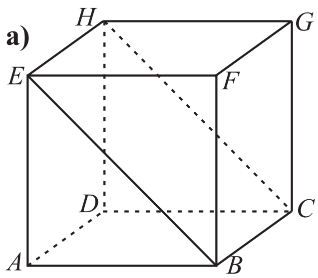
b) În urmă cu x ani: $12 - x = 7 - x + 7 - x \Rightarrow x = 2$.

14. **a)** $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 4 - 3x^2 + 14$; $E(x) = x^2 + 6x + 10$.

b) $E(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 10 = 1$.

c) $E(a) = a^2 + 6a + 10 = a^2 + 6a + 9 + 1 = (a + 3)^2 + 1$; dar $(a + 3)^2 \geqslant 0$ și $1 > 0$, rezultă $E(a) > 0$.

15. **a)**

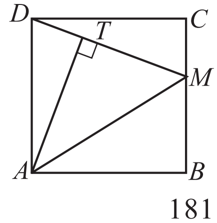


b) $A_{\text{totală}} = 2\left(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{3}\right)$, deci $A_{\text{totală}} = 8\left(1 + 2\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

c) $\left.\begin{array}{l}(EBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ BC \perp (ABF) \text{ și } EB \subset (ABF) \Rightarrow EB \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle((EBC); (ABC)) \equiv \sphericalangle(EBA)$.

ΔAEB isoscel dreptunghic, adică $m(\widehat{EBA}) = 45°$.



d) $\left.\begin{array}{l}AE \perp (ABC) \\ AT \perp DM \\ AT, DM \subset (ABC)\end{array}\right\} \overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} ET \perp DM.$

În ΔMDC: $m(\widehat{C}) = 90° \Rightarrow DM^2 = DC^2 + CM^2$, deci $DM = \sqrt{5}$ cm.

$$A_{ADM} = \frac{AT \cdot DM}{2} = \frac{AD \cdot AB}{2} \Rightarrow AT = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{15}}{5} \text{ cm.}$$

$AE \perp (ABC)$, $AT \subset (ABC) \Rightarrow AE \perp AT$. În ΔEAT, $m(\hat{A}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} ET^2 = AT^2 + AE^2$;

$ET = \dfrac{2\sqrt{85}}{5}$ cm.

Varianta 23

I.

1. 3583000. **2.** 6. **3.** 50. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $8\sqrt{3}$. **6.** 42. **7.** 3. **8.** 600.

II.

9. $9x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18}$; atunci $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ și suma lor este 1. *Răspuns B.*

10. $V_f = \{f(0);\ f(2);\ f(4)\} = \{1;\ 5;\ 9\}$. *Răspuns D.*

11. $m(\sphericalangle ABC) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$. *Răspuns C.*

12. $E = \sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. *Răspuns B.*

III.

13. a) $\left.\begin{array}{l} a - b = 120 \Rightarrow a > b \\ a = 10x \text{ și } b = 6y \end{array}\right\} \Rightarrow 10x - 6y = 120 \Rightarrow 5x - 3y = 60.$

$\left.\begin{array}{l} a : 5 = 10x : 5 = 2x \\ b : 3 = 6y : 3 = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 20 + 2y \Rightarrow x = 10 + y.$

$5(10 + y) - 3y = 60 \Rightarrow 50 + 5y - 3y = 60$; obținem $y = 5$ și $x = 15$, deci $a = 150$.

b) $b = 30$; $p\%150 = 30 \Rightarrow p = \dfrac{3000}{150} = 20 \Rightarrow 20\%$.

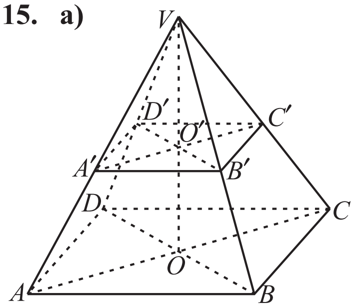
14. a) $\dfrac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$.

b) $\dfrac{2}{a+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow a \in \{0; -2; 1; -3\}$; dar $a \neq -3$, deci $a \in \{0; -2; 1\}$.

c) $\left(\frac{4}{x-1}-\frac{13-5x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x+1}\right)\cdot(x+1)=\frac{4(x+1)-13+5x-2(x-1)}{(x-1)}=$

$=\frac{4x+4-13+5x-2x+2}{(x-1)}=\frac{7x-7}{x-1}=\frac{7(x-1)}{x-1}=7$.

15. a)



b) Fie $A'P\perp AC$; cum $OO'\perp AC$ și $OO'\subset(AOA')$ rezultă $A'P \parallel OO'$. Dar $OO' \perp (ABC)$, rezultă $PA' \perp (ABC)$, deci proiecția muchiei AA' pe (ABC) este AP și $\sphericalangle(AA'; (ABC)) \equiv \sphericalangle A'AP$.

$\Delta AA'P$ dreptunghic isoscel cu $AA' = 6$ cm $\Rightarrow$

$\overset{TP}{\Rightarrow} A'P=AP=3\sqrt{2}$ cm și $OO'=3\sqrt{2}$ cm.

c) $A'O'=3\sqrt{2}$ cm $=PO$, deci $AO=6\sqrt{2}$ cm, $AC=12\sqrt{2}$ cm, $AB=12$ cm; atunci $A_B=144$ cm^2 și $A_b = 36$ cm^2.

$Vol=\frac{h}{3}\left(A_B+A_b+\sqrt{A_B\cdot A_b}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{3}(36+144+6\cdot 12)\Rightarrow Vol=252\sqrt{2}$ cm^3.

d) $A'C' = AO$ și $A'C' \parallel AO$, rezultă $A'AOC'$ paralelogram, deci $CO' \parallel AA'$ și $\sphericalangle(AA', BC') \equiv \sphericalangle OC'B$.

Din $B'C'=\frac{BC}{2}$ și $B'C' \parallel BC$ rezultă în trapezul isoscel $B'C'CB$ că $BC' \perp C'C$ și atunci $BC'=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ cm.

$\Delta OC'B$ dreptunghic în O pentru că $OB \perp (A'AC)$ și $OC' \subset (A'AC)$, rezultă $\sin\widehat{OC'B}=\frac{OB}{BC'}=\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Varianta 24

I.

1. 7. **2.** 998. **3.** 600. **4.** $\{-3\}$. **5.** 6. **6.** 24. **7.** 6. **8.** 126.

II.

9. $S=1+2+3+...+100-(1+2+3)=\frac{100\cdot 101}{2}-6=5050-6=5044$. *Răspuns C.*

10. $\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}+\frac{2+\sqrt{5}}{4-5}=\frac{\sqrt{5}-2-2-\sqrt{5}}{1}=-4$. *Răspuns B.*

11. Din teorema lui Pitagora rezultă că distanța este egală cu $\sqrt{10^2-8^2}=6$ m. *Răspuns D.*

12. Fie AD înălțimea din A și CE bisectoarea din C cu care se intersectează în P. Cum $m(\sphericalangle ACB)=180°-65°-45°=70°$ rezultă $m(\sphericalangle PCA)=35°$ și $m(\sphericalangle CAD)=20°$. Unghiul ascuțit CPD este exterior triunghiului APC, deci $m(\sphericalangle CPD)=35°+20°=55°$. *Răspuns A.*

III.

13. a) $4 \cdot 5 = 20$ puncte pentru problemele rezolvate corect.

$10 - 4 = 6$ probleme rezolvate greșit, deci $6 \cdot 2 = 12$ puncte.

$20 - 12 = 8$ puncte a obținut elevul.

b) $5c - 2g = 29$, dar $c + g = 10$, rezultă $c = 7$ și $g = 3$, adică a rezolvat corect 7 probleme.

14. a) $E(x)=\left(\dfrac{1}{x(x-2)}-\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x-2)(x+2)}\right)\cdot\dfrac{x(x-2)(x+2)}{2(x+3)}=$

$=\dfrac{x+2-x+2+2x}{x(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{x(x-2)(x+2)}{2(x+3)}=\dfrac{2x+4}{2(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$.

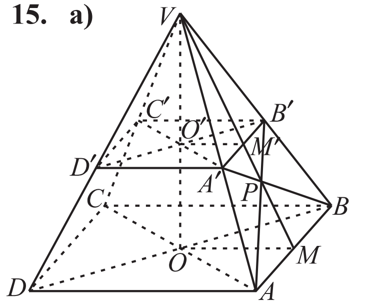
b) $\left|(x+3)\cdot\dfrac{x+2}{x+3}\right|<4 \Rightarrow |x+2|<4 \Rightarrow -4<x+2<4 \Rightarrow -6<x<2 \Rightarrow x\in(-6;2)$.

Cum $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-3; 0; \pm 2\}$, rezultă $S = \{-5; -4; -1; 1\}$.

c) $2E(a)=\dfrac{2a+4}{a+3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+3\mid 2a+4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+3\mid 2a+4 \\ a+3\mid a+3 \Rightarrow a+3\mid 2a+6\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow a+3 \mid (2a+4)-(2a+6) \Rightarrow a+3 \mid (-2) \Rightarrow a+3 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow a \in \{-2; -4; -1; -5\}$; cum $a \neq -2$, rezultă $a \in \{-4; -1; -5\}$.

15. a)



b) Fie M mijlocul lui $[AB]$ și M' mijlocul lui $[A'B']$; atunci $MM' = 12$ cm.

$\Delta M'B'P \sim \Delta MAP \Rightarrow \dfrac{M'B'}{MA}=\dfrac{M'P}{PM}$; obținem $\dfrac{1}{3}=\dfrac{M'P}{PM}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4}{3}=\dfrac{M'P+PM}{PM}\Rightarrow\dfrac{4}{3}=\dfrac{12}{PM}\Rightarrow PM=9$ cm.

În ΔPAM: $m(\widehat{M})=90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AP^2=PM^2+AM^2$; atunci $PA=9\sqrt{2}$ cm, deci $P_{PAB}=18\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm.

c) $OM = 9$ cm și $O'M' = 3$ cm. Ducem $M'Q \perp OM$, rezultă că în $\Delta M'QM$ dreptunghic în Q, $QM = 6$ și $MM' = 12$ cm, deci $M'Q=6\sqrt{3}\text{ cm}=OO'$.

$Vol_{tr}=\dfrac{h}{3}\left(A_B+A_b+\sqrt{A_B\cdot A_b}\right)$; $\quad Vol_{tr}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}(18^2+6^2+18\cdot 6)=936\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

d) $AB \perp OM$ și $AB \perp MM'$, iar $(ABC) \cap (ABB') = AB$, rezultă $\sphericalangle((ABC), (ABB')) \equiv \sphericalangle M'MQ$. În $\Delta M'QM$ dreptunghic în Q avem $QM=\dfrac{1}{2}MM'$, rezultă $m(\widehat{QM'M})=30°$ și atunci $m(\widehat{M'MQ})=60°$.

Varianta 25

I.

1. 4. **2.** 7,45. **3.** 15. **4.** $\frac{3}{5}$. **5.** 48. **6.** 12. **7.** 150. **8.** 8.

II.

9. $-3 \leqslant x-1 \leqslant 0 \Rightarrow -3+1 \leqslant x-1+1 \leqslant 0+1 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow x \in [-2;1]$. *Răspuns C.*

10. $M(2;y) \in G_f \Rightarrow f(2) = y \Rightarrow 4+4 = y \Rightarrow y = 8$. *Răspuns D.*

11. *MN* este linie mijlocie în ΔABC, rezultă $MN = \frac{BC}{2}$; dar $AM = \frac{AB}{2}$ și $AN = \frac{AC}{2}$; rezultă $P_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \cdot P_{\Delta ABC} = 60 \text{ cm}$. *Răspuns C.*

12. $AB \parallel CD$, rezultă că distanța de la P la CD este egală cu $AM = 6$ cm; $A_{\Delta PCD} = \frac{AM \cdot DC}{2} = 30 \text{ cm}^2$. *Răspuns B.*

III.

13. a) $20\%a = 80\%b \Rightarrow a = 4b$;

$p\%a = b \Rightarrow p\%4b = b \Rightarrow p = \frac{100}{4} = 25$, deci 25%.

b) $a^2 + b^2 = 17 \Rightarrow 16b^2 + b^2 = 17 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$; cum $b \in \mathbb{N}$, rezultă $b = 1$ și $a = 4$.

14. a) $E(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)(x+1)}\right) \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{x-1+x+1+2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2} =$

$= \frac{2x+2}{2(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$.

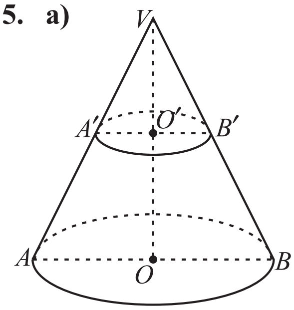
b) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \mid x+1 \\ \text{dar } x-1 \mid x-1 \end{array}\right| \Rightarrow x-1 \mid (x+1)-(x-1) \Rightarrow x-1 \mid 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{2; 0; 3; -1\}$; dar $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, deci $S = \{2; 0; 3\}$.

c) $E(\sqrt{2}) = (a\sqrt{2}+b)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (a\sqrt{2}+b)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^2 = (a\sqrt{2}+b)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$ și $b = 1$.

15. a)



b) Fie $AA' \cap BB' = \{V\}$. În ΔVAB avem $A'B' \parallel AB$ și $A'B' = \frac{1}{2}AB$, rezultă $A'B'$ linie mijlocie și B' mijlocul laturii VB, deci $VB = 60 \text{ cm} = AB$; rezultă ΔVAB echilateral.

$VO \perp (\mathscr{C}(O))$ și $B \in (\mathscr{C}(O))$, rezultă că proiecția muchiei VB pe planul $(\mathscr{C}(O))$ este OB, deci $\sphericalangle(VB; (\mathscr{C}(O)) \equiv \sphericalangle VBO$; $m(\widehat{VBO}) = 60°$.

c) $VO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$ cm; $V_{con} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 30\sqrt{3}}{3} = 9000\pi\sqrt{3}$ cm^3.

d) Fie u^0 unghiul sectorului de cerc. Lungimea arcului de cerc este egal cu: $\frac{u°\pi G}{180°} = 2\pi R$, unde G este generatoarea conului, deci $u° = \frac{2 \cdot 30 \cdot 180°}{60} = 180°$.

Varianta 26

I.

1. 13. **2.** 10. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** –6. **5.** 9. **6.** 24. **7.** 8. **8.** 100.

II.

9. $\sqrt{5^2 - 4^2} \cdot \sqrt{5^2 \cdot 4^2} = \sqrt{25 - 16} \cdot \sqrt{20^2} = \sqrt{9} \cdot 20 = 60$. *Răspuns C.*

10. $(x - y)(x + y) - 2y = 1 \cdot (x + y) - 2y = x + y - 2y = x - y = 1$. *Răspuns B.*

11. AM mediana corespunzătoare ipotenuzei, rezultă $AM = \frac{BC}{2} = BM = AB$, deci ΔAMB echilateral; obținem $m(\sphericalangle AMB) = 60° \Rightarrow m(\sphericalangle AMC) = 120°$. *Răspuns C.*

12. $A_{MBCD} = A_{ABCD} - A_{AMD} = 4^2 - \frac{4 \cdot 2}{2} = 12 \text{ cm}^2$. *Răspuns A.*

III.

13. a) $100a + 10b + c = a + 10b + 100c$, adică $99a = 99c$, rezultă $a = c$.

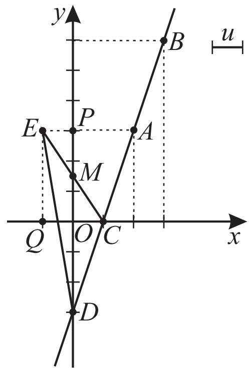
b) $\overline{aba} \,\vdots\, 5 \Rightarrow a = 5$ și $b \in \{0, 1, ..., 9\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\text{cazuri favorabile } 10\\ \text{cazuri posibile } 90\end{matrix}\right\} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{9}$.

14. **a)** $f(2) = m \Rightarrow 2m + n = m \Rightarrow m + n = 0$ (1)

$f(3) = 6 \Rightarrow 3m + n = 6 \overset{(1)}{\Rightarrow} -3n + n = 6 \Rightarrow n = -3;\quad m = 3.$

b) $f(x) = 3x - 3$; $A(2; 3)$ și $B(3; 6)$.

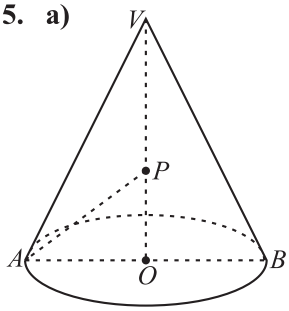
c) $C(1; 0)$; $D(0; -3)$.



Fie $M(0, a)$ mijlocul segmentului EC. Dacă $O(0, 0)$ este centrul de greutate al triunghiului CDE, atunci $OM = \frac{1}{3}DM$, adică $a = \frac{1}{3}(3 + a)$, deci $a = \frac{3}{2}$ obținem $M\left(0; \frac{3}{2}\right)$. DM trebuie să fie mediană în ΔDEC, rezultă $CM = ME$ și $M \in EC$.

Fie $EP \perp Oy \Rightarrow EP = OC = 1$. Fie $EQ \perp Ox$; cum M este mijlocul lui $[EC]$, rezultă MO linie mijlocie în ΔCEQ, deci $MO = \frac{EQ}{2}$, adică $EQ = 3$. În final $E(-1; 3)$.

15. **a)**



b) $u^0 = 240°$; $\frac{u°\pi G}{180°} = 2\pi R \Rightarrow \frac{240°\pi G}{180°} = 2\pi \cdot 8$, deci $G = 12$ cm.

c) $Vol = \frac{\pi R^2 h}{3}$; în ΔVOB: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow VO^2 = VB^2 - OB^2$, deci $VO = 4\sqrt{5}$ cm și atunci

$Vol = \frac{256\pi\sqrt{5}}{3}$ cm^3.

d) Fie P centrul cercului circumscris triunghiului VAB, deci $VP = AP = PB$. Fie $AP = x$. În ΔAPO: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} AP^2 = AO^2 + OP^2$, deci $x^2 = 64 + \left(4\sqrt{5} - x\right)^2$;

$x^2 = 64 + 80 - 8x\sqrt{5} + x^2$; $8x\sqrt{5} = 144$; $x = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm.

Varianta 27

I.

1. 42. **2.** $\frac{7}{8}$. **3.** 30. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** 88. **6.** 32. **7.** 42. **8.** 60.

II.

9. $2m + 4a = 48 \Rightarrow m + 2a = 24$; dar $m \geqslant 1$, rezultă $24 = m + 2a \geqslant 1 + 2a \Rightarrow 2a \leqslant 23 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \leqslant 11{,}5$ deci numărul autoturismelor nu poate fi mai mare decât 11. *Răspuns A.*

10. Din $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ obținem $\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$. *Răspuns D.*

11. Raza cercului circumscris este jumătate din diagonală și este de 4 cm, rezultă $\frac{l\sqrt{2}}{2}=4 \Rightarrow l=4\sqrt{2}$ cm, și atunci $P_{\text{pătrat}}=16\sqrt{2}$ cm. *Răspuns B.*

12. Fie $BD \perp AC$; cum $A_{\Delta ABC}=\frac{AC \cdot BD}{2}$ și $m(\sphericalangle BAD)=45°$, rezultă că triunghiul ABD este dreptunghic isoscel și atunci, din teorema lui Pitagora, rezultă $BD=3\sqrt{2}$ cm. Obținem $A_{\Delta ABC}=\frac{10 \cdot 3\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$ cm^2. *Răspuns B.*

III.

13. a) $2^0=1 \Rightarrow 2+2+2^2+2^3+...+2^{50}=4+2^2+2^3+...+2^{50}=2^2+2^2+2^3+...+2^{50}=$
$=2\cdot 2^2+2^3+...+2^{50}=2^3+2^3+2^4+...+2^{50}=2\cdot 2^3+2^4+...+2^{50}=2^4+2^4+2^5+...+2^{50}=$
$=2\cdot 2^4+2^5+...+2^{50}=2^5+2^5+2^6+...+2^{50}=...=2\cdot 2^{49}+2^{50}=2^{50}+2^{50}=2\cdot 2^{50}$
$=2^{51}$ sau

$$\begin{array}{l} S=2^0+2^1+2^2+...+2^{50} \,\big|\cdot 2 \Rightarrow \\ 2S=2^1+2^2+...+2^{50}+2^{51} \\ \hline S=2^{51}-2^0 \Rightarrow S=2^{51}-1. \end{array} \quad (-)$$

b) I zi: $1=2^0$ pagini; a II-a zi: $2=2^1$ pagini; a III-a zi: $4=2^2$ pagini; ...; a n-a zi: 2^{n-1} pagini. În total a citi: $2^0+2^1+2^2+...+2^{n-1}=1023$.

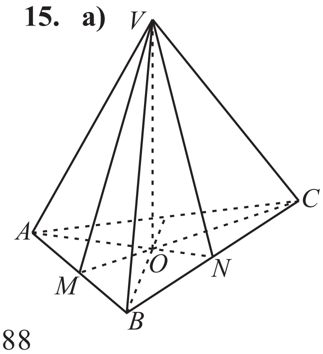
Din a) rezultă $2^0+2^1+...+2^{n-1}=2^n-1$, iar din $2^n-1=1023$ rezultă $2^n=1024$; dar $1024=2^{10}$, deci după 10 zile a citit 1023 pagini.

14. a) $\left.\begin{array}{l} f(3)+f(7)=3a+b+7a+b=10a+2b \\ 2f(5)=2(5a+b)=10a+2b \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)+f(7)=2f(5).$

b) $f(0)=\sqrt{3} \Rightarrow b=\sqrt{3}$ și $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3}{2} \Rightarrow a\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-6}{3}=\sqrt{3}-2$, deci $f(x)=(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}$.

c) $(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}\leqslant 2 \Rightarrow (\sqrt{3}-2)x\leqslant 2-\sqrt{3} \Rightarrow -(2-\sqrt{3})x\leqslant 2-\sqrt{3} \Rightarrow -x\leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x\geqslant -1 \Rightarrow x\in[-1;\infty)$.

15. a)



b) Fie N mijlocul lui $[BC]$.

Avem $VN \perp BC$ și $AN \perp BC$, rezultă $BC \perp (VAN)$; dar $AV \subset (VAN)$, rezultă $BC \perp VA \Rightarrow VA \perp BC$.

c) Fie $VO \perp (ABC) \Rightarrow OA=\frac{2}{3}AN$.

$AN=\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ cm; $AO=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm.

În ΔVAO: $m(\hat{O})=90° \overset{TP}{\Rightarrow} VO^2=VA^2-AO^2$, deci $VO=2\sqrt{6}$ cm.

$$Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

d) Fie G centrul de greutate al triunghiului VAB și $GP \perp (ABC)$; cum $VO \perp (ABC)$ rezultă $GP \parallel VO$; dar $O \in MC$, rezultă $P \in MC$ și atunci d(G, (ABC)) = GP.

$\Delta MGP \sim \Delta MVO \overset{\text{TFA}}{\Rightarrow} \frac{GP}{VO} = \frac{MG}{MV} = \frac{1}{3}$ și obținem $GP = \frac{VO}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

Varianta 28

I.

1. 13. **2.** 3. **3.** 21. **4.** 1101. **5.** 63. **6.** 9. **7.** 5. **8.** 3.

II.

9. 125 + 125 – 200 = 50 de elemente are mulțimea $A \cap B$. *Răspuns D.*

10. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2x - 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = 6 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1; -2)\}$. *Răspuns D.*

11. Din teorema înălțimii rezultă $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ cm, deci $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(4+9) \cdot 6}{2} = 39 \text{ cm}^2$. *Răspuns C.*

12. Fie coarda AB în cercul de centru O și $OD \perp AB$, cu $D \in AB$. Cum triunghiul AOB este isoscel, atunci D este mijlocul segmentului AB. În ΔAOD, din teorema lui Pitagora rezultă OD = 6 cm. *Răspuns A.*

III.

13. **a)** Notăm cu x numărul copiilor: $20x + 5 = 30x - 25$, deci $x = 3$ copii.
b) Obiectul costă $20 \cdot 3 + 5 = 65$ lei.

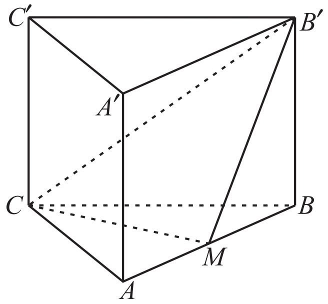
14. **a)** $f(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow 2 + a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$; $g(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} - b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -1$.

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left(2 \cdot 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot 3 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(2 \cdot 20 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 2(1 + 2 + \ldots + 20) + \frac{1}{2} \cdot 20 \Rightarrow S = 20 \cdot 21 + 10 \Rightarrow S = 430$.

c) $g(x) = \frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2} \leqslant 2\left(\frac{3}{2}x + 1\right) + 1 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2} \leqslant 3x + 3 \Rightarrow x \geqslant -\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

15. a) 

b) $V = A_{\text{bazei}} \cdot h \Rightarrow \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot l = 54\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow l^3 = 216 \Rightarrow l^3 = 6^3 \Rightarrow l = 6$, deci $AB = 6$ cm.

c) ΔABC echilateral și CM mediană rezultă $CM \perp AB$; dar $CM \perp AA' \Rightarrow$
$\Rightarrow CM \perp (ABB')$ și $CM \subset (MCB') \Rightarrow$
$\Rightarrow (MCB') \perp (ABB')$.

d) Ducem $BT \perp MB'$ cu $T \in MB'$, rezultă $BT \subset (ABB')$. Cum $CM \perp (ABB')$ și $BT \subset (ABB')$, rezultă $CM \perp BT$.

Deci $BT \perp CM$ și $BT \perp B'M$ rezultă $BT \perp (MCB')$, deci d(B; (MCB')) = BT.

În $\Delta MBB' \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} MB'^2 = MB^2 + B'B^2$, de unde $MB' = 3\sqrt{5}$ cm.

În $\Delta MBB'$ dreptunghic în $\widehat{B}$, $BT = \frac{MB \cdot BB'}{MB'} = \frac{6 \cdot 3}{3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ cm.

Varianta 29

I.

1. 8. **2.** 259. **3.** 3. **4.** 1,234. **5.** 3000. **6.** 40. **7.** 200. **8.** 24.

II.

9. $f(-1) - f(-2) \cdot (-1-2) = -1 + 3 - (-2+3)(-1-2) = 2 - (-3) = 5$. *Răspuns A.*

10. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow x \in \{3; 2\} \Rightarrow x \in [1; 4]$. *Răspuns C.*

11. AB diametru, rezultă că oricare ar fi punctul C situat pe cerc avem m($\sphericalangle ACB$) = = 90°, deci triunghiul ABC are două unghiuri ascuțite (cazuri favorabile) din trei posibile; $P(E) = \frac{2}{3}$. *Răspuns D.*

12. Triunghiul ABD este isoscel cu un unghi de 60°, rezultă că ΔABD este echilateral. Fie $\{O\} = AC \cap BD$; atunci $AO = \frac{DB\sqrt{3}}{2}$, de unde $AC = DB\sqrt{3}$ cm; dar $A_{\text{romb}} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{AC}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AC}{2} = 24\sqrt{3}$ cm², rezultă $AC^2 = 144$, deci $AC = 12$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. a) $\frac{a}{b} = \frac{64}{100} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{41}{25}$; dar $a + b = 123$, rezultă $a = 48$ și $b = 75$.

b) $m_g = \sqrt{ab} = 60$.

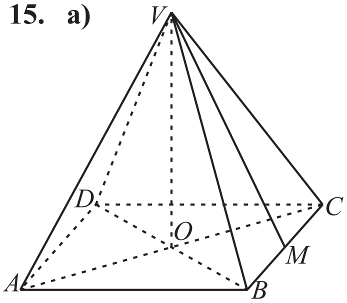
14. a) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{2} = \left|1-\sqrt{2}\right| - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -1$.

b) $9n^2 + 6n + 1 = (3n + 1)^2$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

c) $E = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9y^2 + 6y + 10} = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(3y+1)^2 + 9}$.

$\left.\begin{array}{l} E = |x-3| + \sqrt{(3y+1)^2 + 9} \\ |x-3| \geqslant 0,\ (3y+1)^2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ E are valoare minimă când $x - 3 = 0$ și $3y + 1 = 0$, adică $x = 3$ și $y = -\dfrac{1}{3}$.

15. a)

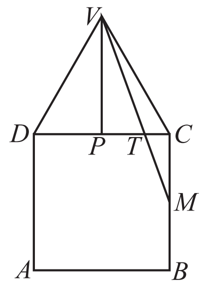


b) $VABCD$ piramidă regulată, rezultă $VB = 10$ cm; ΔVMB dreptunghic în $M \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} BM^2 = VB^2 - VM^2$ și obținem $BM = 5$ cm și $AB = 10$ cm.

c) $VO \perp (ABC)$ și $B \in (ABC)$ rezultă că proiecția muchiei VB pe planul (ABC) este OB, deci $\sphericalangle(VB; (ABC)) \equiv \sphericalangle VBO$.

$\cos\widehat{VBO} = \dfrac{OB}{VB} = \dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{m}(\widehat{VBO}) = 45°$.

d) $VT + TM$ are lungime minimă când, prin desfășurarea piramidei, punctele V, T, M sunt coliniare.



Fie P mijlocul segmentului DC. Atunci $VP \parallel CM \overset{\text{TFA}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \Delta VPT \sim \Delta MCT \Rightarrow \dfrac{TC}{PT} = \dfrac{CM}{VP}$; obținem $\dfrac{TC}{5 - TC} = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5TC\sqrt{3} = 25 - 5TC \Rightarrow TC\left(5\sqrt{3} + 5\right) = 25$, rezultă

$TC = 2{,}5\left(\sqrt{3} - 1\right)$ cm.

Varianta 30

I.

1. 0,25. **2.** 9. **3.** $(-\infty; 2]$. **4.** 327. **5.** 169. **6.** $6\sqrt{3}$. **7.** 6. **8.** 32.

II.

9. $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Rightarrow x \in \{-3; 2\}$, deci soluția naturală este 2. *Răspuns C.*

10. $m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{\left(\sqrt{10} + 3\right)\left(\sqrt{10} - 3\right)} = \sqrt{10 - 9} = 1$. *Răspuns B.*

11. $m(\sphericalangle BIC) = 180° - \frac{m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)}{2} = 180° - \frac{180° - m(\sphericalangle BAC)}{2} =$

$= 180° - \frac{110°}{2} = 125°$. *Răspuns B.*

12. Din $A_{\text{dreptunghi}} = L \cdot l$ obținem $144 = L \cdot 9$, deci $L = 16$; $P_{\text{dreptunghi}} = 2(L + l) = 50$ cm . *Răspuns D.*

III.

13. a) După x zile:

$2800 - 100x = 1300 - 25x \Rightarrow 75x = 1500 \Rightarrow x = 20$, deci după 20 de zile.

b) După y zile:

$2800 - 100y = 2(1300 - 25y) \Rightarrow 50y = 200 \Rightarrow y = 4$, deci după 4 zile.

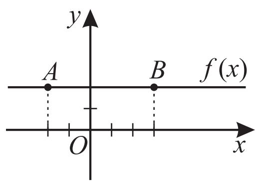
14. a) $f(-2) = 2 \Rightarrow -2(a - 3) + b + 1 = 2 \Rightarrow -2a + b = -5$

$f(3) = 2 \Rightarrow 3(a - 3) + b + 1 = 2 \Rightarrow 3a + b = 10$, deci

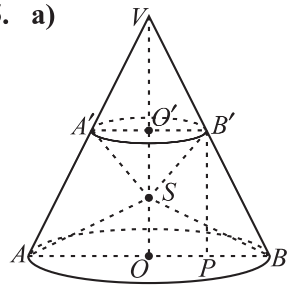
$a = 3$ și $b = 1$.

b) $f(x) = 2$.

c) $f(x) = x \Leftrightarrow 2 = x \Rightarrow P(2; 2)$.



15. a)



b) $\frac{R}{3} = \frac{r}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \overset{\text{not}}{=} k \Rightarrow R = 3k$, $r = 2k$, $h = k\sqrt{3}$.

Fie $B'P \perp AB$; atunci $PB = R - r$.

În $\Delta B'PB$: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} B'B^2 = B'P^2 + PB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 = 3k^2 + (3k - 2k)^2 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$; atunci $R = 12$ cm.

c) $r = 8$ cm și $A_{lat} = \pi G(R + r) = \pi \cdot 8 \cdot 20 = 160\pi$ cm^2.

d) Fie $SO = x$; $V_{con} = \frac{\pi R^2 h}{3}$; $OO' = 4\sqrt{3}$ cm.

$\frac{\pi \cdot 12^2 \cdot x}{3} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot (4\sqrt{3} - x)}{3} \Rightarrow 9x = 4(4\sqrt{3} - x) \Rightarrow 13x = 16\sqrt{3}$, deci $SO = \frac{16\sqrt{3}}{13}$ cm.

Varianta 31

I.

1. 18. **2.** 2,34. **3.** 3. **4.** 17. **5.** 12. **6.** 16. **7.** 45. **8.** $64\sqrt{3}$.

II.

9. $2x - 1 \leqslant 2 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. *Răspuns D.*

10. $2x^2+3x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$. *Răspuns D.*

11. Dacă O este centrul hexagonului, atunci hexagonul regulat este format din 6 triunghiuri echilaterale congruente cu ΔABO, unde AB este o latură a hexagonului, deci $A_{\text{hexagon}}=6\cdot\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=6\cdot\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{2}=36\sqrt{3}\text{ cm}^2$. *Răspuns B.*

12. Prin teorema lui Pitagora, cateta este de $\sqrt{2}\text{ cm}$, deci $P_\Delta=2\sqrt{2}+2=2\left(\sqrt{2}+1\right)\text{ cm}$. *Răspuns B.*

III.

13. a) Notăm cu x toată distanța.

în prima zi: $\dfrac{35}{100}x$; a rămas $\dfrac{65}{100}x$ din drum.

a doua zi: $\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{65}{100}x$; a rămas $\dfrac{65}{100}x-\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{65}{100}x=\dfrac{65\cdot 80}{100\cdot 100}x$ din drum.

a treia zi: $624=\dfrac{65\cdot 80}{100\cdot 100}\cdot x$, deci $x=1200$ km.

b) a doua zi: $\dfrac{20}{100}\cdot\dfrac{65}{100}\cdot 1200=156$ km.

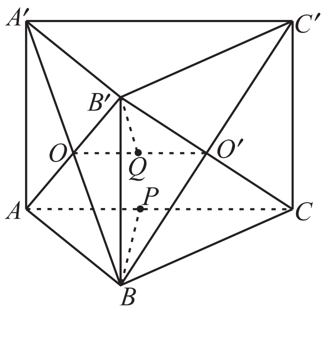
14. a) $n=\dfrac{3-\sqrt{5}+5}{2}-\dfrac{3-\sqrt{5}+3}{2}=\dfrac{8-\sqrt{5}-6+\sqrt{5}}{2}=1\in\mathbb{N}$.

b) $g(-5)=-1\Rightarrow -5(1-m)+3m=-1\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

c) Daca $m=1\Rightarrow\left|-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\right|+|3|=6\Rightarrow|3-x|=6.$

De aici, avem $3-x=6$ sau $3-x=-6$. Obtinem $x\in\{-3;9\}$.

15. a)



b) OO' linie mijlocie în $\Delta AB'C$, rezultă $OO' \parallel AC$.

$BB' \perp (ABC)$ și $AC \subset (ABC)$ rezultă, $BB \perp AC$.

Avem deci $OO' \perp BB'$.

c) Fie $BP \perp AC$, $P \in AC$, $BB' \perp (ABC)$, $AB, AC \subset (ABC) \overset{T3P}{\Rightarrow} B'P \perp AC$;

$AC \parallel OO' \Rightarrow B'P \perp OO'$; $B'P \cap OO' = \{Q\}$; $d(B; OO') = BQ$.

În ΔABC echilateral $BP = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

În $B'BP$ (teorema lui Pitagora): $B'P = \sqrt{B'B^2 + BP^2} = \sqrt{36+48} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ cm;

$BQ = QP = \frac{B'P}{2} = \sqrt{21}$ cm.

d) Fie $B'Q \cap AC = \{P\}$, dar $\Delta B'AC$ isoscel, rezultă P mijlocul segmentului AC.

$$\left.\begin{array}{l} (B'AC) \cap (BA'C') = OO' \\ BQ \perp OO' \\ QP \perp OO' \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle((B'AC); (BA'C')) \equiv \sphericalangle BQP; \quad BQ = QP = \sqrt{21}\text{ cm} \quad \text{și}$$

$BP = 4\sqrt{3}$ cm. Fie $QS \perp BP$. $QS = \frac{1}{2}BB' = 3$; $A_{\Delta BQP} = \frac{BP \cdot QS}{2} = \frac{BQ \cdot QP \cdot \sin \widehat{BQP}}{2}$.

$4\sqrt{3} \cdot 3 = 21 \cdot \sin \widehat{BQP} \Rightarrow \sin \widehat{BQP} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Varianta 32

I.

1. 3. **2.** 2. **3.** 12. **4.** 16. **5.** 90. **6.** 12. **7.** $100\sqrt{3}$. **8.** 216.

II.

9. $x^2 + 4x + 4 - 3x + 3 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x \in \{1; -2\}$.
Răspuns C.

10. $\frac{\sqrt{3}-3}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}-3-\sqrt{3}+1}{2} = -1$. *Răspuns D.*

11. Măsura arcului mic AC este egală cu $360° - (110° + 80°) = 170°$, deci $m(\sphericalangle ABC) = \frac{170°}{2} = 85° < 90°$. *Răspuns B.*

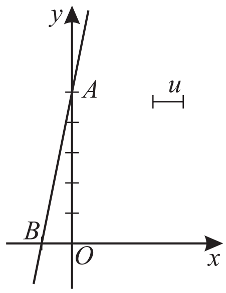
12. În triunghiul ABD, din teorema lui Pitagora rezultă $BD^2 = 5^2 + 15^2$, deci $BD = 5\sqrt{10}$ cm. Fie $AP \perp BD$ cu $P \in BD$, atunci $AP = \frac{AB \cdot AD}{BD} = 1{,}5\sqrt{10}$ cm. *Răspuns C.*

III.

13. **a)** $\begin{cases} 5c-3g=340 \\ c+g=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c-3g=340 \\ 3c+3g=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8c=640 \\ c+g=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=80 \\ g=20 \end{cases}$.

b) $5c-3g>450$, dar $g=100-c$, deci $5c-3(100-c)>450$. Rezultă $5c+3c>750$, de unde $c>93{,}75$, deci sunt cel puțin 94 de răspunsuri corecte.

14. **a)** Din $f(a)=25$ rezultă $a(a+1)+5=25$, adică $a^2+a-20=0$, cu soluțiile $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, deci $a\in\{4;-5\}$.



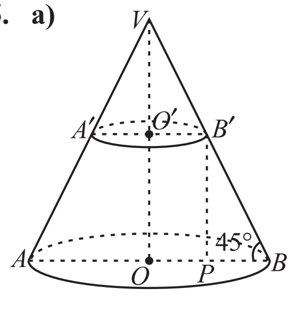
b) $f(x)=5x+5$; $f(0)=5\Rightarrow A(0;\ 5)$; $f(-1)=0\Rightarrow B(-1;\ 0)$.

c) $f(x)=5x+5$; $M\in G_f \Rightarrow f(m)=n$;
$5|m|=|n|\Rightarrow 5|m|=|f(m)|$; dar $5|m|=|5m+5|\Rightarrow 5|m|=5|m+1|$.

Obținem $|m|=|m+1|$, de unde $m=m+1$ sau $m=-m-1$, deci $m=-\dfrac{1}{2}$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=5\left(-\frac{1}{2}\right)+5=\frac{5}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right).$$

15. **a)**



b) $\dfrac{r}{2}=\dfrac{R}{3}\overset{\text{not}}{=}k\Rightarrow r=2k$, $R=3k$.

Fie O' și O centrele bazelor și $B'P\perp AB$. Rezultă $B'P\parallel OO'$, dar $OO'\perp(C(O))$, deci proiecția muchiei $B'B$ pe planul $(C(O))$ este PB.

Obținem $\sphericalangle(B'B,\ (C(O)))\equiv\sphericalangle B'BP$; $PB=B'P$ pentru că $m(\sphericalangle B'BP)=45°\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} B'P=PB=10$ cm; din $PB=R-r$, rezultă $3k-2k=10\Rightarrow k=10$, deci $R=30$ cm.

c) $A_t=\pi g(R+r)+\pi R^2+\pi r^2=500\pi\sqrt{2}+900\pi+400\pi=100\pi(5\sqrt{2}+13)$ cm².
$r=2k=20$ cm.

d) $Vol=\dfrac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\dfrac{\pi\cdot 10}{3}(30^2+20^2+30\cdot 20)=\dfrac{19000\pi}{3}$ cm³.

$\dfrac{19\pi}{3}\text{dm}^3=\dfrac{19\pi}{3}l<\dfrac{19\cdot 3{,}15}{3}l<20l$, deci nu încap.

Varianta 33

I.

1. 7. **2.** 3. **3.** 4. **4.** $\frac{4}{7}$. **5.** 40. **6.** 48. **7.** 3. **8.** $36\sqrt{3}$.

II.

9. $f(x) = 2x + 1$ pentru că, dacă $x = -1$, atunci $f(-1) = -1$. *Răspuns C.*

10. $5x+8\leqslant 33 \Rightarrow 5x\leqslant 25 \Rightarrow x\leqslant 5$, deci $x\in\{1; 2; 3; 4; 5\}$ pentru că $x \neq 0$. *Răspuns D.*

11. $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow \frac{6}{8}=\frac{AN}{12}\Rightarrow AN=9\Rightarrow NC=12-9=3$ cm. *Răspuns C.*

12. Suma măsurilor a două unghiuri suplementare este 180°. Fiind congruente, rezultă că fiecare are 90°. *Răspuns D.*

III.

13. **a)** Considerăm x elevi și y bănci: $1 \cdot y + 6 = 2 \cdot (y - 5) + 1 \Rightarrow y + 6 = 2y - 10 + 1$, deci $y = 15$ bănci.

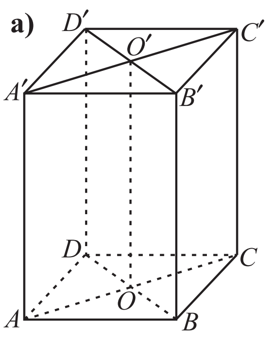
b) $y + 6 = x \Rightarrow x = 21$ elevi.

14. **a)** $E(0)=\left(\frac{4}{9}-1\right):\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=-\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{1}=-5$.

b) $E(x)=\frac{x^2-4-x^2+9}{(x-3)(x+3)}:\frac{x+3+x-3-1}{(x-3)(x+3)}=\frac{5}{2x-1}$.

c) $\frac{5}{2a-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2a-1\in\{\pm1;\pm5\}\Rightarrow 2a\in\{2; 0; 6; -4\}\Rightarrow a\in\{1; 0; 3; -2\}$; cum $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3; \frac{1}{2}; 3\right\}$, rezultă $S=\{1; 0; -2\}$.

15. **a)**



b) $AC'^2 = AB^2 + BC^2 + A'A^2 = 81$.

Din $AB + BC + A'A = 15$ rezultă $AB^2 + BC^2 + A'A^2 + 2(AB \cdot BC + AB \cdot A'A + BC \cdot A'A) = 225$; obținem $81 + A_t = 225$, deci $A_t = 144$ cm².

c) Din $81 = 16 + 16 + A'A^2$ rezultă $A'A = 7$ cm și $AC = 4\sqrt{2}$ cm, deci $A_{ACC'A'} = 28\sqrt{2}$ cm².

d) Din $AO \perp DB$ și $AO \perp B'B$ rezultă $AO \perp (DBB')$ și $O' \in (DBB')$, deci proiecția dreptei AO' pe planul (DBB') este OO'; rezultă $\sphericalangle(O'A; (DBB')) \equiv \sphericalangle AO'O$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

$\text{tg}\sphericalangle AO'A=\frac{AO}{OO'}=\frac{2\sqrt{2}}{7}$.

Varianta 34

I.

1. 12. **2.** 0,15. **3.** 22. **4.** 204. **5.** 180. **6.** $2\sqrt{2}$. **7.** 40. **8.** 144.

II.

9. $(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+6=1-3+6=4$. *Răspuns A.*

10. $E(a)=\sqrt{(1-3)^2}+|1-1|+2\cdot|-1|=2+0+2=4$. *Răspuns C.*

11. $\text{m}(\sphericalangle AOD)=2\cdot\text{m}(\sphericalangle COD)=2\cdot\text{m}(\sphericalangle AOC)=2\cdot 2\cdot\text{m}(\sphericalangle BOC)=4\cdot 15°=60°$. *Răspuns C.*

12. $\text{m}(\sphericalangle MNP)=30^\circ \Rightarrow MP=\dfrac{MN}{2}=3$ cm. *Răspuns B.*

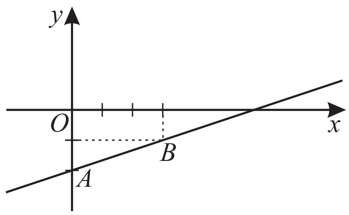
III.

13. **a)** $0,(3)=\dfrac{1}{3}$ și $0,1(6)=\dfrac{16-1}{90}=\dfrac{15}{90}=\dfrac{1}{6}$.

b) $\dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}$ și $\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{6} \Rightarrow \dfrac{a}{6}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{6}\ \Big|\cdot 6 \Rightarrow a=2b=c$.

$a^2+b^2+c^2=81 \Rightarrow 4b^2+b^2+4b^2=81 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3$; cum $b\in\mathbb{N}$, rezultă $b=3$ și $a=c=6$.

14. **a)** $f(0)=-2 \Rightarrow A(0;-2)$;
$f(3)=-1 \Rightarrow B(3;-1)$; deci G_f este dreapta AB.

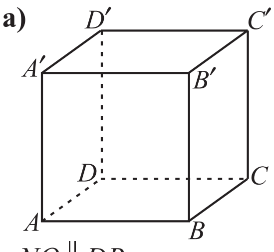


b) $f(m)=2 \Rightarrow \dfrac{1}{3}m-2=2 \Rightarrow m=12$.

c) $f(b)-f(a)+2f\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=$

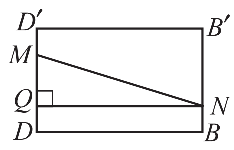
$=\dfrac{1}{3}b-2-\dfrac{1}{3}a+2+2\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a-b}{2}-2\right)=\dfrac{b}{3}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{3}-4=-4$.

15. **a)**



b) Piramida regulată $ACD'B'$ are toate muchiile egale cu $4\sqrt{2}$ cm (egale cu diagonala unei fețe), deci $A_{totală}=4\cdot A_{unei\ fețe}=4\cdot\dfrac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=32\sqrt{3}$ cm^2.

c) Fie $NQ \parallel DB$.



În ΔMQN dreptunghic în Q avem: $QN=4\sqrt{2}$ cm,
$QM=2$ cm $\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}$ $MN^2=MQ^2+QN^2$, deci $MN=6$ cm.

d) Fie $AP \perp MN$ și $PN = x$. Din teorema lui Pitagora în ΔANB și în ΔMDA obținem $AN = \sqrt{AB^2 + NB^2} = \sqrt{17}$ cm și $AM = \sqrt{DM^2 + AD^2} = 5$ cm.

$$\left.\begin{array}{l} \text{În } \Delta APN\text{: } m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AP^2 = AN^2 - PN^2 \\ \text{În } \Delta AMP\text{: } m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AP^2 = AM^2 - MP^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 17 - x^2 = 25 - (6 - x)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 17 - x^2 = 25 - 36 + 12x - x^2 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}$. Obținem $AP^2 = 17 - \dfrac{49}{9}$, de unde $AP = \dfrac{2}{3}\sqrt{26}$ cm și $A_{AMN} = \dfrac{MN \cdot AP}{2} = 2\sqrt{26}$ cm^2.

Testul 35

I.

1. 8. **2.** 8. **3.** 6. **4.** 2. **5.** 28. **6.** $5\sqrt{2}$. **7.** 24. **8.** 12.

II.

9. $2\sqrt{3} - 3 \cdot 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$. *Răspuns B.*

10. $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \dfrac{x-3}{x+3}$. *Răspuns A.*

11. Cum $L = 7 + l$ și $P_{\text{dreptunghi}} = 2(L + l)$, rezultă $50 = 2(L + L - 7)$, deci $2L = 32$ și atunci $L = 16$ cm. *Răspuns D.*

12. $2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 3$. *Răspuns D.*

III.

13. a) Fie x prețul obiectului.

După prima majorare: $x + 15\%x = \dfrac{115}{100}x$ noul preț

După a doua majorare: $\dfrac{115x}{100} - \dfrac{15}{100} \cdot \dfrac{115}{100}x = \dfrac{85 \cdot 115}{100 \cdot 100}x$

$\dfrac{85 \cdot 115}{10000}x = 195{,}5 \Rightarrow x = 200$ lei.

b) După majorare prețul a fost: $200 + \dfrac{15}{100} \cdot 200 = 230$ lei.

14. a) $f(1) = 2 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2 \Rightarrow A \in G_f$.

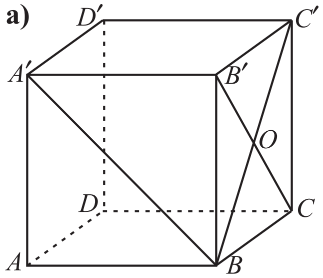
b) $(2 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow (2 - \sqrt{5})x \geqslant 2 - \sqrt{5}$, deci $x \leqslant 1$ (pentru că $2 - \sqrt{5} < 0$), adică $x \in (-\infty; 1]$.

c) $f(a) = b + b\sqrt{5} \Rightarrow \left(2-\sqrt{5}\right)a + \sqrt{5} = b + b\sqrt{5} \Rightarrow 2a - \sqrt{5}a + \sqrt{5} = b + b\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5}(b+a-1) + (b-2a) = 0$; cum a, $b \in \mathbb{Q}$, rezultă $b + a - 1 \in \mathbb{Q}$ și $b - 2a \in \mathbb{Q}$.

$\underbrace{\sqrt{5}(b+a-1)}_{\text{irațional}} = \underbrace{2a-b}_{\text{rațional}}$ posibil numai dacă $b + a - 1 = 0$ și $2a - b = 0$, adică $2a + a - 1 = 0$ și $b = 2a$; rezultă $a = \dfrac{1}{3}$ și $b = \dfrac{2}{3}$.

15. a)



b) $BC \perp (ABB')$, $A'B \subset (ABB') \Rightarrow BC \perp A'B$; $A'C = 12$ cm $\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}$ $A'B^2 = A'C^2 - BC^2$, deci $A'B = 6\sqrt{3}$ cm.

În $\Delta A'AB$: $m(\widehat{A}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} A'A^2 = A'B^2 - AB^2$ și atunci $A'A = 6$ cm.

c) $A_{tot} = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h) =$
$= 2\left(6\sqrt{2} \cdot 6 + 6\sqrt{2} \cdot 6 + 6 \cdot 6\right) = 72\left(2\sqrt{2} + 1\right)$ cm^2.

d) Fie $B'C \cap C'B = \{O\}$ și $MN \parallel BC$ prin O, cu $M \in B'B$.

Atunci d((O; ($A'BC$)) = d(M; ($A'BC$)). Fie $MT \perp A'B$, dar $BC \perp (A'BB')$ și $BC \subset (A'BC)$, rezultă $(A'BC) \perp (A'BB')$; cum $A'B = (A'BC) \cap (A'BB')$, rezultă $MT \perp (A'BC)$ și deci d(M; ($A'BC$)) = MT.

În $\Delta A'B'B$ dreptunghic în $\widehat{B'}$, M mijlocul laturii $B'B$ și $MT \perp A'B$, implică MT linie mijlocie în $\Delta B'QB$, unde $B'Q \perp A'B$.

$$B'Q = \frac{A'B' \cdot B'B}{A'B} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \text{d}(O; (A'BC)) = \sqrt{6} \text{ cm}$$

sau

$$\frac{A_{A'BC} \cdot \text{d}(O; (A'BC))}{3} = \frac{A_{BOC} \cdot A'B'}{3}$$ (volumul tetraedrului $OA'BC$), rezultă

$$\frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} \cdot d = 9 \cdot 6\sqrt{2}$$, de unde $\text{d}(O; (A'BC)) = \sqrt{6}$ cm.

Varianta 36

I.

1. 16,5. **2.** –4. **3.** 2. **4.** 28. **5.** 360. **6.** 28. **7.** 25. **8.** 5.

II.

9. $2 < \sqrt{5} \Rightarrow \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 - 2 - \sqrt{5} = -4$. *Răspuns D.*

10. $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$; $4 = \sqrt{16}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; obținem ordinea $4; 3\sqrt{2}; 2\sqrt{5}$. *Răspuns B.*

11. Triunghiul este dreptunghic, rezultă că ipotenuza este diametrul cercului circumscris triunghiului, deci este egală cu 12 cm. Din teorema lui Pitagora rezultă cateta egală cu $6\sqrt{2}$ cm, deci $A_{\triangle} = \dfrac{\text{cateta}^2}{2} = 36\ \text{cm}^2$. *Răspuns C.*

12. În triunghiul MAN: $m(\widehat{MAN}) = 90° \overset{TP}{\Longrightarrow} MN^2 = AN^2 + AM^2$, de unde $AN = 3$ m. În triunghiul MBN: $m(\sphericalangle NMB) = 90° \overset{TÎ}{\Longrightarrow} MA^2 = NA \cdot AB$, rezultă $81 = 3AB$, adică $AB = 27$ m. *Răspuns B.*

III.

13. **a)** 42 + 85 + 68 = 195 kg.

b) $195 + 3x \leqslant 240 \Rightarrow 3x \leqslant 45 \Rightarrow x \leqslant 15$, deci un pachet poate cântări cel mult 15 kg.

14. **a)** Din $x + 3 \overset{not}{=} a$ și $x - 4 \overset{not}{=} b$ rezultă

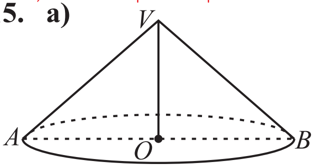
$E(x) = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (x+3+x-4)^2 = (2x-1)^2$.

b) $E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}-1)^2 \cdot (-2\sqrt{2}-1)^2 = \left[(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)\right]^2 = 49$.

c) Deoarece x este număr întreg $\Rightarrow$ $2x-1$ este număr întreg $\Rightarrow$ $(2x-1)^2$ este număr natural. Din $(2x-1)^2 \in \{0;1;2;3;4;...\}$, avem: $(2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \notin \mathbf{N}$

$(2x-1)^2 = 1 \Rightarrow |2x-1| = 1 \Rightarrow 2x-1 = 1$ sau $2x-1 = -1 \Rightarrow$ $x \in \{0;1\}$.

15. **a)**



b) Fie $VO \perp (\mathcal{C}(O)) \overset{TP}{\Longrightarrow} OB^2 = VB^2 - VO^2$, atunci $OB = 6\sqrt{3}$ cm.

$A_{lat} = \pi RG = \pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 72\pi\sqrt{3}$ cm².

$A_{totală} = 36\pi(2\sqrt{3}+3)$ cm².

c) Proiecția dreptei VB pe planul cercului este OB, rezultă $\sphericalangle(VB; \mathcal{C}(O)) \equiv \sphericalangle VBO$. Cum $VO = \dfrac{VB}{2}$, obținem $m(\widehat{VBO}) = 30°$.

d) $Vol_{con} = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 108 \cdot 6}{3} = 216\pi \simeq 216 \cdot 3{,}14\,\text{cm}^3$, deci

$Vol_{con} \simeq 0{,}678\ \text{dm}^3 > 0{,}5$ litri. Da, încape.

Varianta 37

I.

1. 11. **2.** 4,2. **3.** [3; 7]. **4.** 14. **5.** 36. **6.** 24. **7.** 96. **8.** 150.

II.

9. $F(\sqrt{2}) = \dfrac{1-2(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2+1} = \dfrac{1-4}{2+1} = -1$. *Răspuns C.*

10. $\frac{2^{48}}{4} = 2^{48} : 2^2 = 2^{46}$. *Răspuns D.*

11. $AD = 2 \cdot AC = 56 \Rightarrow BD = AD - AB = 56 - 7 = 49$ cm. *Răspuns B.*

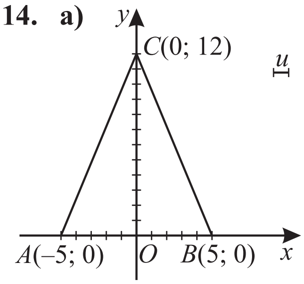
12. Linia mijlocie este egală cu $\frac{B+b}{2}$ și atunci $18 = \frac{24+b}{2} \Rightarrow b = 36 - 24 \Rightarrow b = 12$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. a) $\left.\begin{array}{l} f = 2b \\ f - 30 = b - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 24$ și $f = 48$.

b) Au participat la faza de selecție 24 + 48 = 72 elevi. Au promovat pentru faza finală (48 – 30) + (24 – 6) = 36 elevi; $p\%$ din 72 = 36, rezultă $p = 50$, deci 50% au promovat.

14. a)

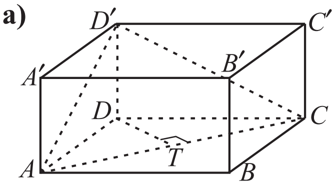


b) $A_{ABC} = \frac{AB \cdot OC}{2} = 60\, u^2$.

c) $\left.\begin{array}{l} f(-5) = 0 \Rightarrow -5a + b = 0 \\ f(0) = 12 \Rightarrow b = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{12}{5}$.

$f(x) = \frac{12}{5}x + 12$.

15. a)



b) $A_{lat} = P_b \cdot h = 2(30 + 40) \cdot 24 = 3360$ cm^2.

c) $\left.\begin{array}{l} BC \perp (ABB') \\ A'B \subset (ABB') \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp A'B \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A'; BC) = A'B$.

În $\Delta AA'B$: $m(\widehat{A}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} A'B^2 = A'A^2 + AB^2$, rezultă $A'B = \sqrt{1476} = 6\sqrt{41}$ cm.

d) $\left.\begin{array}{l} DD' \perp (ABC) \\ \text{ducem } DT \perp AC \\ DT,\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\} \overset{T3P}{\Rightarrow} D'T \perp AC;$

$\left.\begin{array}{l} (ACD') \cap (ACD) = AC \\ D'T \perp AC \\ DT \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle((ACD'); (ACD)) \equiv \sphericalangle DTD'$.

Din $DT = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24$ cm rezultă $DD' = DT$, deci $m(\sphericalangle DTD') = 45°$.

Varianta 38

I.

1. 18. **2.** 20. **3.** 72. **4.** 7. **5.** 150. **6.** $9\sqrt{3}$. **7.** 64. **8.** 200.

II.

9. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 2, 5 este egal cu 30. *Răspuns C.*

10. $a + b = 31$; peste x ani: $(a+x)+(b+x)=39 \Rightarrow 2x=39-31 \Rightarrow x=4$. *Răspuns D.*

11. Dacă ducem PM și NQ se formează 4 paralelograme congruente. Fiecare paralelogram mic este format din câte 2 triunghiuri congruente, deci $A_{\text{paralelogram}} = 8 \cdot A_{\text{triunghi}}$; $A_{\text{triunghi}} = 9\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{MNPQ} = 4 \cdot A_{\text{triunghi}} = 4 \cdot 9 = 36\ \text{cm}^2$. *Răspuns C.*

12. Fie $DM \perp AB$; atunci $m(\sphericalangle ADM) = 30°$ și, pentru că $ABCD$ este trapez isoscel, $AM = \dfrac{12-6}{2} = 3$ cm și $AD = 2AM = 6$ cm.

Deci perimetrul trapezului este egal cu $2AD + AB + CD = 30$ cm. *Răspuns A.*

III.

13. **a)** *arrrr*; *aarrr*; *aaarr*; *aaaar*; *aaaaa*; *rrrrr*.

b) cazuri favorabile 3, cazuri posibile 6; $P(E) = \dfrac{1}{2}$.

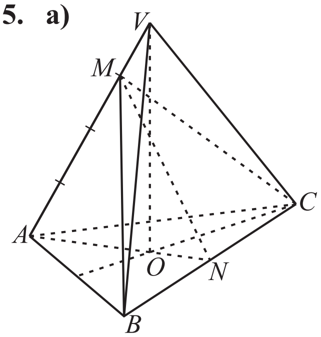
14. **a)** $E(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} : \left(\dfrac{x+3-4}{4(x-1)}\right) \cdot \dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x^2+1} \cdot \dfrac{4(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

b) $\dfrac{4x}{x^2+1} \cdot (x^2+1) \leqslant 1 \Rightarrow 4x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{4}$; cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, rezultă $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \setminus \{-1\}$.

c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4a}{a^2+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2+1 \mid 4a \Rightarrow a^2+1 \mid 4a^2 \\ \text{dar } a^2+1 \mid a^2+1 \Rightarrow a^2+1 \mid 4a^2+4 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+1 \mid 4a^2-4a^2-4 \Rightarrow a^2+1 \mid 4.$$

Rezultă $a^2+1 \in \{1; 2; 4\}$ pentru că $a^2 + 1 > 0$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, deci $a^2 \in \{0; 1; 3\}$. Cum $a \in \mathbb{Z}$, rezultă $a \in \{0; \pm 1\}$; dar $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, deci $a = 0$.

15. a)



b) Fie $MP \parallel VO$, unde $VO \perp (ABC)$.

În ΔVOA: $m(\widehat{O}) = 90° \Rightarrow VO^2 = VA^2 - AO^2$; obținem $VO^2 = 12^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{12\sqrt{3}}{2}\right)^2$, adică $VO = 4\sqrt{6}$ cm.

$\Delta AMP \sim \Delta AVO \Rightarrow \frac{AM}{AV} = \frac{MP}{VO} = \frac{AP}{AO}$; obținem $\frac{AP}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4} = \frac{MP}{4\sqrt{6}}$, deci $MP = 3\sqrt{6}$ cm și $AP = 3\sqrt{3}$ cm.

$PN = ON + PO = \frac{1}{3}\cdot\frac{12\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm, unde $PO = AO - AP = \sqrt{3}$ cm.

În ΔMPN: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} MN^2 = MP^2 + PN^2$; obținem $MN = \sqrt{54+27} = 9$ cm $= AM$, deci ΔMAN isoscel.

c) $Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3} = 144\sqrt{2}$ cm^3.

d) $BC \perp AN$ și $BC \perp MN$ (pentru că ΔMBC isoscel); dar $BC = (MBC) \cap (ABC)$, rezultă $\sphericalangle((MBC); (ABC)) \equiv \sphericalangle MNA$.

În ΔMPN cu $m(\widehat{P}) = 90°$ avem $\sin\widehat{N} = \frac{MP}{MN} = \frac{3\sqrt{6}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Varianta 39

I.

1. 4. **2.** 9876. **3.** 2. **4.** 9. **5.** (3; +∞). **6.** 5. **7.** $12\sqrt{3}$. **8.** 63.

II.

9. $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow x \in \{-4; 2\}$. *Răspuns D.*

10. Cea mai mică diferență este 0 – 5 = –5. *Răspuns A.*

11. $A_{MND} = A_{ABCD} - A_{AMD} - A_{CDN} - A_{MBN} = 36 - 9 - 9 - 4{,}5 = 13{,}5$ cm^2. *Răspuns C.*

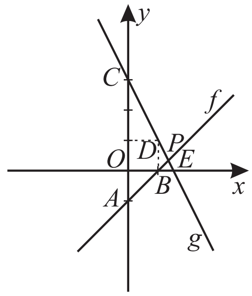
12. *MN* este linie mijlocie în triunghiul *ABC*, rezultă $MN = \frac{AC}{2}$; *NP* este linie mijlocie în triunghiul *BCD*, rezultă $NP = \frac{BD}{2}$. $P_{MNPQ} = 2\,MN + 2\,NP = AC + BD = 12 + 16 = 28$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. **a)** 250 + 10% · 250 = 275 lei, după prima scumpire.

b) $275 + p\% \cdot 275 = 250 + 80$; $p\% \cdot 275 = 55$; $p = \dfrac{5500}{275}$; obținem $p = 20$, deci prețul după a doua scumpire s-a mărit cu 20%.

14. **a)** $f(0) = -1 \Rightarrow A(0; -1)$; $f(1) = 0 \Rightarrow B(1; 0)$.
$g(0) = 3 \Rightarrow C(0; 3)$; $g(1) = 1 \Rightarrow D(1; 1)$.



b) Fie $G_f \cap G_g = \{P\}$.

$f(x) = g(x) = x - 1 = 3 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$;

$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow P\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$;

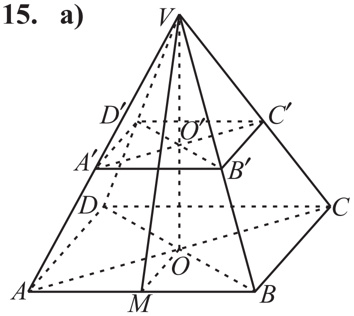
$G_g \cap Ox$: $g(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow E\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$;

$A_{COBP} = A_{COE} - A_{BEP} = \dfrac{CO \cdot OE}{2} - \dfrac{PT \cdot BE}{2}$, unde $PT \perp Ox$;

$A_{COBP} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{26}{12} = \dfrac{13}{6}$; $BE = OE - OB = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$.

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a-1}{3-2a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3-2a \mid a-1 \Rightarrow 3-2a \mid 2a-2 \\ \text{dar } 3-2a \mid 3-2a \Rightarrow 3-2a \mid 3-2a \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 2a \mid 1$, adică $3 - 2a = 1$ sau $3 - 2a = -1$; obținem $a = 1$ sau $a = 2$, de unde $a \in \{1; 2\}$.

15. **a)**



b) Fie $VO \perp (ABC)$ și M mijlocul laturii AB.
$OM = 6\sqrt{3}$ și $VM = 12$.

În ΔVOM: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} VO^2 = VM^2 - OM^2$, deci $VO = 6$ cm.

$Vol = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{(12\sqrt{3})^2 \cdot 6}{3} = 864$ cm³.

c) $\left.\begin{array}{l} AB = (VAB) \cap (ABC) \\ VM \perp AB \\ OM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle((VAM); (ABC)) \equiv \sphericalangle VMO$. În ΔVOM, din $VO = \dfrac{VM}{2}$ rezultă $m(\widehat{VMO}) = 30°$.

d) Fie planul $(A'B'C')$ care intersectează $A'B'$ în M' și VO în O'.

75% din A_{lat} a piramidei $VABCD$ este egală cu A_{lat} a trunchiului de piramidă $ABCDA'B'C'D'$, adică: $75\% \cdot \dfrac{4AB \cdot VM}{2} = \dfrac{4(AB + A'B') \cdot MM'}{2}$; dar $\dfrac{VM'}{VM} = \dfrac{A'B'}{AB} \overset{not}{=} k$, deci $VM' = kVM$ și $A'B' = kAB$.

$\frac{3}{4} \cdot AB \cdot VM = (AB + kAB)(VM - VM \cdot k)$;

$\frac{3}{4} = 1 - k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$, rezultă $\frac{VO'}{VO} = \frac{1}{2}$ și atunci $OO' = 3\,\text{cm}$.

Varianta 40

I.

1. 37. **2.** 8. **3.** 1. **4.** –2. **5.** 14. **6.** $3\sqrt{2}$. **7.** $\sqrt{6}$. **8.** 216.

II.

9. $(b - c)(b + c) = 45 \Rightarrow b - c = 9 \Rightarrow c - b = -9 \Rightarrow 5c - 5b = 5 \cdot (-9) = -45$. *Răspuns B.*

10. Dacă $x = 2$ sau $x = 3$ sau $x = 4$, atunci $\frac{5x}{24}$ este reductibilă, iar dacă $x \geqslant 5$, atunci fracția este supraunitară. *Răspuns C.*

11. Aria triunghiului $ABC = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Mediana împarte triunghiul în două suprafețe de arii egale, deci $A_{ABP} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, iar $A_{BMP} = \sqrt{3}\,\text{cm}^2$. *Răspuns C.*

12. $m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle BAC) = 2m(\sphericalangle ECA) \Rightarrow m(\sphericalangle ECA) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$. Unghiul *BEC* este exterior triunghiului *ECA*, deci $m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle ECA) + m(\sphericalangle BAC) =$
$= \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2} + m(\sphericalangle BAC) = \frac{3m(\sphericalangle BAC)}{2}$; obținem $m(\sphericalangle BAC) = 10°$, $m(\sphericalangle BAD) = 20°$, $m(\sphericalangle ABC) = 160°$. *Răspuns A.*

III.

13. a) Din $n = 0$ rezultă $x = -11 - 3 = -14$ și $y = 18 - 3 = 15$, deci $x - y = -29$.

b) ***n* par** $\Rightarrow n = 2k$ cu $k \in \mathbb{Z}$.

$x = 14k - 11 - 3 = 14k - 14$ și $y = 14k + 15$.

$14k - 14 \mid 14k + 15$, dar $14k - 14 \mid 14k - 14$, rezultă $14k - 14 \mid 29$, de unde $14k - 14 \in \{\pm 1; \pm 29\}$; obținem $14k \in \{15; 13; 43; -15\}$, deci $k \notin \mathbb{Z}$.

***n* impar** $\Rightarrow n = 2k + 1$.

$x = 14k + 7 - 11 + 3 = 14k - 1$ și $y = 14k + 7 + 18 + 3 = 14k + 28$.

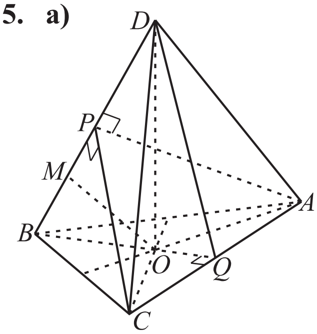
$$\left.\begin{array}{l} x \mid y \Rightarrow 14k-1 \mid 14k+28 \\ \text{dar } 14k-1 \mid 14k-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 14k-1 \mid 29$$, de unde $14k - 1 \in \{\pm 1; \pm 29\}$; obținem $14k \in \{2; 0; 30; -28\}$, deci $k \in \{0; -2\}$ și $n \in \{1; -3\}$.

14. a) $a \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$ și $6 \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow b = -18$.

b) $x = -\frac{4}{a} \in \mathbb{N}$ dacă $a \in \{-1; -2; -4\}$.

c) Din $x = -\frac{4}{a}$ și $x = -\frac{b}{6}$ obținem $-\frac{4}{a} = -\frac{b}{6}$, deci $ab = 24$.

15. a)



b) Notăm $AB = x$. Fie $AP \perp BD$; ΔABD echilateral, rezultă $AP = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

În ΔOBD: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{\text{TC}}{\Rightarrow} OB^2 = BM \cdot BD$.

$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$; din $\frac{3x^2}{9} = BM \cdot x$ rezultă $BM = \frac{x}{3}$, dar $BP = \frac{x}{2}$ și deci $MP = \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$.

În ΔMAP: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} MA^2 = MP^2 + PA^2$ și atunci $28 = \frac{x^2}{36} + \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x = 6$, de unde $AB = 6$ cm.

c) În ΔDOB: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} OD^2 = DB^2 - OB^2 \Rightarrow OD^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2$, de unde $OD = 2\sqrt{6}$ cm.

$Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = 18\sqrt{2}$ cm^3.

d) Fie Q mijlocul laturii AC; $AC \perp BQ$ și $AC \perp QD$, rezultă $AC \perp (BQD)$. Dar $M \in (BQD)$, rezultă că proiecția dreptei MC pe planul (BQD) este MQ, deci $\sphericalangle(MC; (BQD)) \equiv \sphericalangle CMQ$.

În ΔCMQ cu $m(\widehat{Q}) = 90°$: $\sin\widehat{CMQ} = \frac{CQ}{MC} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Varianta 41

I.

1. 16. **2.** $\frac{21}{8}$. **3.** 20. **4.** 280. **5.** 90. **6.** 5. **7.** 30 **8.** 75.

II.

9. $2m + 4a = 34 \Rightarrow m + 2a = 17 \Rightarrow 2a \leqslant 17 \Rightarrow a \leqslant 8{,}5$, deci numărul autoturismelor nu poate fi mai mare decât 8. *Răspuns D.*

10. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{30-32} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9$. *Răspuns B.*

11. Raza cercului înscris într-un triunghi echilateral este $\frac{1}{3}$ din înălțimea triunghiului, adică $4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$; obținem $l = 8\sqrt{3}$ cm. *Răspuns C.*

12. Fie $BD \perp AC$ cu $D \in AC$. Atunci $m(\sphericalangle ABD) = 30°$, deci $AD = 3$ cm și din teorema lui Pitagora în ΔABD rezultă, $BD = 3\sqrt{3}$ cm. Din teorema lui Pitagora în ΔBDC obținem $BC^2 = DC^2 + BD^2$, deci $BC = 2\sqrt{19}$ cm. *Răspuns C.*

III.

13. a) $\frac{4+3\sqrt{2}}{2} \in \left(4; 3\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 4 < \frac{4+3\sqrt{2}}{2} < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 8 < 4+3\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, obținem $8 < 4+3\sqrt{2}$ și $4+3\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, de unde $4 < 3\sqrt{2}$, adică $16 < 18$ (A).

b) $\sqrt{n} \in \left(4; 3\sqrt{2}\right) \Rightarrow 4 < \sqrt{n} < 3\sqrt{2} \Rightarrow 16 < n < 18 \Rightarrow n = 17$, deci $\sqrt{17}$ este număr irațional.

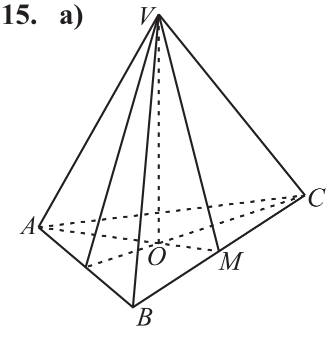
14. a) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$.

b) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 + 2(x - 2)(x + 1) = 0$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; -1\}$.

Din $x + 1 = p$ și $x - 2 = q$ rezultă $(p + q)^2 = 0$, de unde $2x - 1 = 0$ și deci $x = \frac{1}{2}$.

c) $3x + 6 - 2x + 6 \geqslant 12 \Rightarrow x \geqslant 0 \Rightarrow x \in [0; \infty)$.

15. a)



b) Fie $VO \perp (ABC)$; $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$ cm.

În ΔVAO: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} VO^2 = VA^2 - AO^2$ și obținem $VO = 2\sqrt{3}$ cm.

$Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 36$ cm³.

c) Fie M mijlocul laturii BC; din $BC \perp AM$ și $BC \perp VM$ rezultă $BC \perp (VAM)$; dar $VA \subset (VAM) \Rightarrow BC \perp AV \Rightarrow VA \perp BC$.

d) Fie $PQ \perp VM$ cu $Q \in VM$, deci $PQ \subset (VOM)$; dar $BC \perp (VAM) \Rightarrow BC \perp PQ \Rightarrow$ $\Rightarrow PQ \perp BC$ și, cum $PQ \perp VM$, rezultă $PQ \perp (VBC)$, deci $PQ = d(P; (VBC))$.

Deoarece este piramidă regulată, distanța de la P la toate fețele laterale este aceeași.

$P \in VO \Rightarrow d(P; (ABC)) = PO$; $\quad PQ = PO \overset{\text{not}}{=} x$.

$\Delta VPQ \sim \Delta VMO \overset{\text{TFA}}{\Rightarrow} \dfrac{PQ}{OM} = \dfrac{VP}{VM}$, și atunci $\dfrac{x}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3} - x}{3\sqrt{2}} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{3}$, de unde $PO = \left(3 - \sqrt{3}\right)$ cm.

Dacă $AO = 2\sqrt{6}$ cm, atunci $OM = \sqrt{6}$ cm; în ΔVBM: $m(\widehat{M}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} VM = 3\sqrt{2}$ cm.

Varianta 42

I.

1. 5. **2.** 10. **3.** 3. **4.** 7,3. **5.** 0,2. **6.** 60. **7.** 50 **8.** $6\sqrt{3}$.

II.

9. 4 muncitori ....12 ore .

3 muncitori ....x ore

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{x}{12} \Rightarrow x = 16$ ore *Răspuns C.*

10. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{15}{b} \Rightarrow N = 30 - 20 = 10$. *Răspuns B.*

11. $r = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ cm. *Răspuns D.*

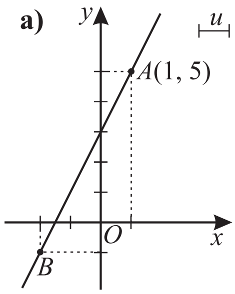
12. Trapezul fiind isoscel, rezultă $P_{\text{trapez}} = B + b + 2 \cdot l$, unde l este latura neparalelă, adică $P_{\text{trapez}} = 2 \cdot 12 + 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 12 = 32$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. a) $\left.\begin{array}{l}\text{cazuri posibile: } 4 + 8 = 12 \\ \text{cazuri favorabile: } 4\end{array}\right\} \Rightarrow P(E) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}.$

b) După ce extrag 4 bile albe, sigur a cincea bilă va fi roșie.

14. a)



Graficul este dreapta AB

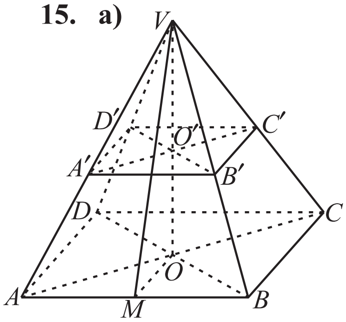
b) $\left.\begin{array}{l} f(1)=5 \Rightarrow a+b=5 \\ f(-2)=-1 \Rightarrow -2a+b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=6$, deci

$a = 2$ și $b = 3$.

c) $f(x) = 2x + 3 \in [-5; 6] \Rightarrow -5 \leqslant 2x + 3 \leqslant 6 \;\big|-3$

$\Rightarrow -8 \leqslant 2x \leqslant 3 \;\big|:2 \Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[-4; \dfrac{3}{2}\right]$.

15. a)



b) Fie O și O' centrele bazelor; $AC = 12\sqrt{2}$ cm, $A'C' = 8\sqrt{2}$ cm, rezultă $A'O' = 4\sqrt{2}$ cm și $AO = 6\sqrt{2}$ cm.

Ducem $A'E \perp AC$ și atunci $EO = 4\sqrt{2}$ cm, deci $AE = AO - EO = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

$\operatorname{tg}\sphericalangle A'AC = \dfrac{A'E}{AE} \Rightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{A'E}{2\sqrt{2}} \Rightarrow A'E = OO' = 3\sqrt{2}$ cm.

c) $A_{lat} = \dfrac{(P_B + P_b)a_p}{2}$.

Fie M mijlocul $[AB]$ și M' mijlocul $[A'B']$. Din $A'C' = 8\sqrt{2}$ cm rezultă $A'B' = 8$ cm, deci $O'M' = 4$ cm; $OM = 6$ cm. Ducem $M'Q \perp OM$, rezultă $M'Q = OO' = 3\sqrt{2}$ cm și $MQ = MO - QO = MO - M'O' = 2$ cm.

În $\Delta M'MQ$: $m(\widehat{Q}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} M'M^2 = M'Q^2 + MQ^2$, de unde $M'M = \sqrt{22}$ cm, deci

$A_{lat} = 40\sqrt{22}$ cm^2.

d) $VABCD$ este piramidă regulată, rezultă $\Delta APB \equiv \Delta CPB$, deci $AP = PC$ și atunci ΔAPC isoscel în care PO mediană. Rezultă $PO \perp AC$, deci

$A_{APC} = \dfrac{AC \cdot OP}{2} = \dfrac{12\sqrt{2} \cdot OP}{2} = 6\sqrt{2} \cdot OP$ minimă atunci când OP este minim. Fie V vârful piramidei $VABCD$, OP minim când $OP \perp VB$.

În ΔVOB: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{\text{TC}}{\Rightarrow} OB^2 = PB \cdot VB$.

Ducem $B'T \perp OB, T \in OB; B'T = O'O = 3\sqrt{2}$ cm;

$TB = OB - OT = OB - O'B' = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

În $\Delta B'TB, m(\widehat{T}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} B'B^2 = B'T^2 + TB^2$; $B'B = \sqrt{18+8} = \sqrt{26}$ cm.

$\dfrac{VB'}{VB} = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow \dfrac{VB - B'B}{VB} = \dfrac{8}{12} \Rightarrow \dfrac{VB - \sqrt{26}}{VB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow VB = 3\sqrt{26}$ cm.

Deci $\left(6\sqrt{2}\right)^2 = PB \cdot 3\sqrt{26}$, rezultă $PB = \dfrac{12\sqrt{26}}{13}$ cm.

Varianta 43

I.

1. 1. **2.** 9. **3.** 4. **4.** $\frac{2}{5}$. **5.** 30. **6.** 15. **7.** 160 **8.** 15.

II.

9. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}\Rightarrow x\in\left\{1;-\frac{4}{3}\right\}$. *Răspuns D.*

10. Șirul 10; 11; 12; ...; 99 conține 99 – 9 = 90 numere. Numerele $\overline{aa}\in\{11; 22; ...; 99\}$ sunt în număr de 9, deci există 90 – 9 = 81 numere formate cu 2 cifre diferite. *Răspuns D.*

11. Fie *ABCD* rombul, m($\sphericalangle A$) = 30° și $BE\perp AD$ cu $E\in AD$; $BE=\frac{AB}{2}=8$ cm. *Răspuns B.*

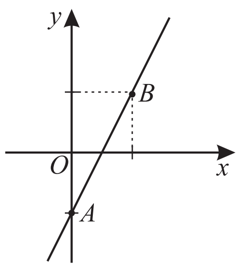
12. Dacă *AB* și *SR* sunt diametre, atunci se înjumătățesc și sunt egale, deci *ARBS* dreptunghi. *Răspuns B.*

III.

13. a) $\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{1}{5}$.

b) $a+b+c=48$, dar $c=5a$ și $b=2a$, rezultă $8a=48$, de unde $a=6$, $b=12$, $c=30$.
c.m.m.d.c = $d=6$ și $2^k<6<2^{k+1}$ pentru $k=2$.

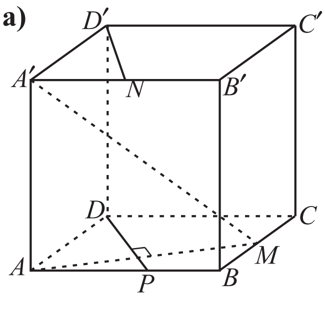
14. a) $\left.\begin{array}{l} f(0)=-1\Rightarrow A(0;-1)\\ f(1)=1\Rightarrow B(1;1)\end{array}\right|\Rightarrow$ dreapta $AB=G_f$.



b) $C\in G_f\Rightarrow f(|a|)=2a+1\Rightarrow 2|a|-1=2a+1\Rightarrow$
$\Rightarrow 2|a|-2a=2\Rightarrow|a|-a=1$.
Dacă $a\geqslant 0\Rightarrow a-a=1\Rightarrow 0=1$ (F).
Dacă $a<0\Rightarrow -a-a=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

c) $s=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+...+(2\cdot2007-1)$.
$s=2(1+2+...+2007)-2007\Rightarrow s=2007\cdot2008-2007\Rightarrow s=2007^2$, deci *s* pătrat perfect.

15. a)



b) Din $A'A\perp(ABC)$ și $AM\subset(ABC)$ rezultă $A'A\perp AM\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}A'M^2=AM^2+A'A^2$.

În ΔABM: $m(\widehat{B})=90°\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}AM^2=AB^2+BM^2$,

deci $AM=\frac{x\sqrt{5}}{2}$, unde $AB\overset{\text{not}}{=}x$.

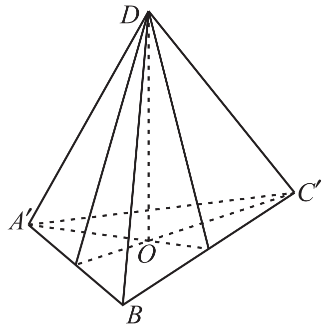
$81=x^2+\frac{5x^2}{4}\Rightarrow 9x^2=81\cdot4\Rightarrow x=6$, deci $AB=6$ cm.

c) Piramida $A'C'BD$ este regulată cu toate muchiile egale cu $6\sqrt{2}$ cm (diagonale în pătrate egale).

Fie O centrul bazei $A'BC'$; atunci DO este înălțimea piramidei. În $\Delta DOC'$; $m(\hat{O}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} DO^2 = DC'^2 - OC'^2$;

$OC' = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$ cm; $DO = \sqrt{72 - 24} = 4\sqrt{3}$ cm.

$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 72$ cm^3.



d) Fie P mijlocul laturii AB, rezultă $DP \parallel D'N$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta DAP \equiv \Delta ABM \text{ (CC)} \Rightarrow \widehat{MAB} \equiv \widehat{ADP} \\ \text{dar } m(\widehat{ADP}) + m(\widehat{APD}) = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{APD}) = 90°\text{, deci } AM \perp DP.$$

$AA' \perp (ABC)$, $DP \subset (ABC) \Rightarrow DP \perp AA'$; cum $DP \perp AM \Rightarrow DP \perp (AA'M)$ și cum $DP \parallel D'N$, rezultă $D'N \perp (AA'M)$.

Varianta 44

I.

1. $3^2 \cdot 2^2$. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 50. **6.** 12. **7.** 600 **8.** 36.

II.

9. $n = 2 \cdot 4 \cdot 3 - 10 = 14$. *Răspuns C.*

10. $\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-5}{x+5}$. *Răspuns B.*

11. $MN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{7+9}{2} = 8$ cm. *Răspuns A.*

12. Oy este mediatoarea segmentului AA', deci $A'(3;\ 2)$ este simetricul lui A. *Răspuns C.*

III.

13. a) Fie x prețul inițial.

După scumpire: $x + 10\%x = \frac{110x}{100}$;

După ieftinire: $\frac{110x}{100} - 10\%\frac{110x}{100} = 247{,}5$;

$\frac{110x}{100} \cdot \frac{90}{100} = \frac{24750}{100} \Rightarrow 99x = 24750 \Rightarrow x = 250$ lei.

b) $250 - 247{,}5 = 2{,}5$; $p\%250 = 2{,}5 \Rightarrow p\% = 1\%$; produsul s-a ieftinit cu 1%.

14. a) $3 \cdot 14 + 2 \cdot 4 = 42 + 8 = 50$, deci $(14; 4)$ este soluție.

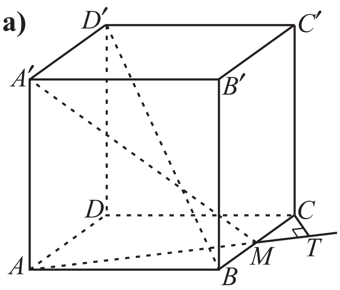
b) $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = x^2 - 4 + y^2 \Rightarrow -4x + 8y = -24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 56 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{(14; 4)\}.$$

c) $2x + 2 \leqslant x\sqrt{5} + \sqrt{5} \Rightarrow 2 - \sqrt{5} \leqslant x\left(\sqrt{5} - 2\right) \Rightarrow -\left(\sqrt{5} - 2\right) \leqslant x\left(\sqrt{5} - 2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \geqslant -1 \Rightarrow x \in [-1; \infty)$.

15. a)



b) $A'A \perp (ABC)$, $AM \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp AM$.

Fie $AB \overset{\text{not}}{=} x \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AA'^2 + AM^2 = A'M^2$.

În ΔAMB: $m(\widehat{B}) = 90° \Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2$,

deci $AM = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$.

Din $144 = x^2 + \dfrac{5x^2}{4}$ rezultă $144 = \dfrac{9x^2}{4}$,

adică $x = 8$ și deci $AB = 8$ cm.

c) $D'D \perp (ABC)$ și $B \in (ABC)$, rezultă că proiecția segmentului BD' pe (ABC) este DB, deci $\sphericalangle(BD'; (ABC)) \equiv \sphericalangle D'BD$; $\quad \text{tg}\sphericalangle D'BD = \dfrac{DD'}{DB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Fie $CT \perp AM$ cu $T \in AM$. Atunci $CT \subset (ABC)$ și cum $AA' \perp (ABC)$ rezultă $AA' \perp CT$. Dar $CT \perp AM$, implică $CT \perp (A'AM)$, deci $d(C; (A'AM)) = CT$.

$\Delta CMT \sim \Delta AMB \Rightarrow \dfrac{CT}{AB} = \dfrac{CM}{AM}$, deci $CT = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ cm.

Varianta 45

I.

1. 333. **2.** 13. **3.** 3. **4.** 0. **5.** $\dfrac{9}{4}$. **6.** 22. **7.** 288. **8.** $2\sqrt{3}$.

II.

9. $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. *Răspuns C.*

10. $x^2 - 16$. *Răspuns D.*

11. $AB = 11 - 1 = 10$ cm și $MB = \dfrac{AB}{2} = 5$ cm, deci $MC = 5 + 1 = 6$ cm. *Răspuns B.*

12. $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. *Răspuns C.*

III.

13. a) Fie x prețul inițial.

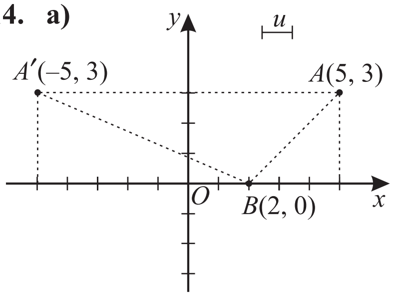
După prima scumpire: $10\%x + x = \dfrac{110}{100}x$ noul preț.

După a doua scumpire: $\frac{10}{100}\cdot\frac{110}{100}x+\frac{110}{100}x=13,31$;

$\frac{110}{100}\cdot\frac{110}{100}x=\frac{1331}{100}$, obținem $121x=1331$, de unde $x=11$ lei.

b) 13,31 – 11 = 2,31; $p\%11=2,31\Rightarrow p=\frac{231}{11}=21$, deci cu 21%.

14. a)



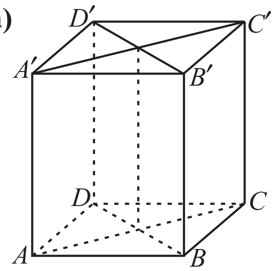
b) $A'(-5;\ 3)$; $A_{ABA'}=\frac{10\cdot 3}{2}=15u^2$.

c) $f(5)=3$ și $f(2)=0$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ și $C\in G_f$ dacă $f(m)=2m+1$.

$\begin{cases}5a+b=3\\2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$, obținem $f(x)=x-2$

$f(m)=m-2$, deci $m-2=2m+1$, de unde $m=-3$.

15. a)



b) Din $BC\perp AB$ și $BC\perp BB'$ rezultă $BC\perp(ABB')$; $A'B\subset(ABB')\Rightarrow BC\perp A'B$.

c) În $\Delta A'BC$: $m(\hat{B})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow BC^2=A'C^2-A'B^2$, deci $BC=3\sqrt{5}$ cm.

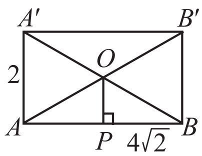
În $\Delta A'AD$: $m(\hat{A})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}A'A^2=A'D^2-AD^2$, deci $A'A=2$ cm.

În $\Delta A'AB$: $m(\hat{A})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}AB^2=A'B^2-A'A^2$, rezultă $AB=4\sqrt{2}$ cm.

Atunci $Vol=AB\cdot BC\cdot AA'=24\sqrt{10}$ cm^3.

d) Fie O și O' centrele fețelor $ABB'A'$ respectiv $DCC'D'$.
$OO'\parallel BC$, rezultă $OO'\perp(ABB'A')$ în care sunt incluse $A'B$ și AB'.

$$\left.\begin{array}{l}OO'=(A'BC)\cap(B'AD)\\A'O\perp OO'\\B'O\perp OO'\end{array}\right\}\Rightarrow\sphericalangle((A'BC);(B'AD))\equiv\sphericalangle A'OB'\equiv\sphericalangle AOB.$$



$$\left.\begin{array}{l}OP\perp AB\\O\text{ mijlocul lui }A'B\end{array}\right|\Rightarrow OP\text{ linie mijlocie; }OP=\frac{AA'}{2}=1\text{ cm.}$$

În $\Delta A'AB$, $m(\hat{A})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}A'B^2=A'A^2+AB^2$; atunci $A'B=6$ cm, deci $OA=OB=3$ cm.

$$\left.\begin{array}{l}A_{AOB}=\frac{4\sqrt{2}\cdot 1}{2}=2\sqrt{2}\\A_{AOB}=\frac{OA\cdot OB\cdot\sin\widehat{AOB}}{2}=\frac{9}{2}\sin(\widehat{AOB})\end{array}\right\}\Rightarrow\sin(\widehat{AOB})=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Varianta 46

I.

1. 11. **2.** 170. **3.** 9. **4.** 3. **5.** 45. **6.** 18. **7.** 240. **8.** 400.

II.

9. $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{\left(6+4\sqrt{2}\right)+\left(6-4\sqrt{2}\right)}{2} = 6$. *Răspuns C.*

10. Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007 = 0$ pentru că $2 \cdot 5 = 10$, deci ultima cifră a numărului $3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007 = 3$. *Răspuns C.*

11. $MN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{10+8}{2} = 9$ cm. *Răspuns D.*

12. Măsura unghiului format de bisectoare este $\frac{80+120}{2} = 100°$. *Răspuns B.*

III.

13. a) $x + y + z = 130$, unde x, y, z sunt sumele celor trei frați.

$x - \frac{2}{3}x = y - \frac{3}{4}y = z - \frac{2}{5}z$; $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{\frac{5}{3}} = \frac{130}{7+\frac{5}{3}} = \frac{390}{26} = 15$; obținem $x = 45$ lei, $y = 60$ lei, $z = 25$ lei.

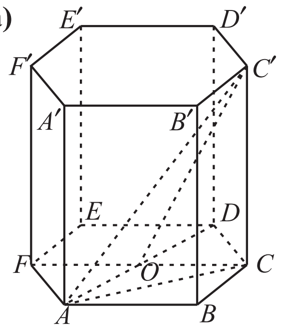
b) Cei trei frați au cheltuit: $\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$ lei; $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ lei și $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ lei.

14. a) $E(x) = (x + 1)^2 + 2(x - 7) + 1 = x^2 + 2x + 1 + 2x - 14 + 1 =$
$= x^2 + 4x - 12 = x^2 + 4x + 4 - 16 = (x + 2)^2 - 4^2 = (x + 2 - 4)(x + 2 + 4) = (x - 2)(x + 6)$.

b) $E(-1) = (-1 - 2)(-1 + 6) = -3 \cdot 5 = -15$.

c) $E(x) + 16 = x^2 + 4x - 12 + 16 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geqslant 0$.

15. a)



b) $m(\widehat{C'AC}) = 45° \Rightarrow CC' = AC$.

Fie $AB = x$, atunci $OC = x$ și $CC' = x\sqrt{3}$ pentru că $AC = x\sqrt{3}$ ($AOCB$ romb).

În $\Delta C'CO$: $m(\widehat{C}) = 90° \Rightarrow C'O^2 = C'C^2 + CO^2$, de unde $108 = 3x^2 + x^2$, deci $4x^2 = 108$; $x = 3\sqrt{3}$ cm.

c) $A_{lat} = P_b \cdot h = 6 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 9 = 162\sqrt{3}$ cm², deoarece $CC' = x\sqrt{3} = 9$; $A_{tot} = A_{lat} + 2 \cdot A_{hexagon} =$
$= 162\sqrt{3} + 2 \cdot 6 \cdot \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 243\sqrt{3}$ cm².

d) $\left.\begin{array}{l} AOCB \text{ romb} \Rightarrow BO \perp AC \\ CC' \perp (ABC) \text{ și } BO \subset (ABC) \Rightarrow BO \perp CC' \end{array}\right\} \Rightarrow BO \perp (ACC').$

$BO \cap AC = \{P\} \Rightarrow \mathrm{d}(B;(ACC')) = BP = \frac{1}{2}OB = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm.

Varianta 47

I.

1. 55. **2.** $3\sqrt{2}$. **3.** 40. **4.** 9,8. **5.** 4. **6.** 3. **7.** 36. **8.** 600.

II.

9. $\left(-\frac{x^2}{y^4}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^4}\right)=\frac{1}{x^2\cdot y^2}$. *Răspuns B.*

10. Din $3(x-1)=(x-1)(x+1)$ rezultă $x=1$ sau $x=2$, deci $S=\{1; 2\}$. *Răspuns D.*

11. Din teorema lui Pitagora rezultă că: $ip = 6^2 + 8^2$, deci $ip = 10$ cm și atunci $h=\frac{c_1\cdot c_2}{ip}=\frac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$ cm. *Răspuns B.*

12. $\sin^2 B+\cos^2 B=\frac{AC^2}{BC^2}+\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}\overset{\text{TP}}{=}\frac{BC^2}{BC^2}=1$. *Răspuns C.*

III.

13. a) De la 9 la 14,30 sunt 5h30′.

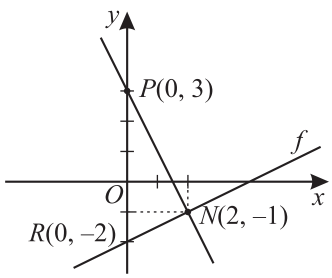
2 muncitori.................. $5h30'$

4 muncitori.................... $x\,h$

$\frac{2}{4}=\frac{x}{5h30'}\Rightarrow x=2h$ și 45 minute, deci de la ora 8 până la ora 10,45.

b) 2 muncitori execută lucrarea în 5 ore și 30 minute, rezultă că 1 muncitor o execută în 11 ore.

14. a) $f(x)=g(x)$; $0{,}5x-2=-2x+3$; $x\left(\frac{1}{2}+2\right)=5$; $x\cdot\frac{5}{2}=5\Rightarrow x=2$.



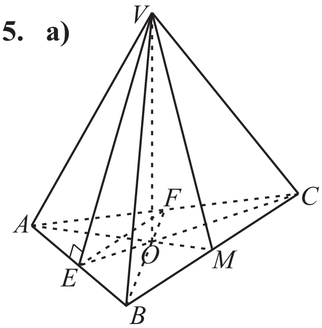
b) $f(0)=-2\Rightarrow M(0;-2)$; $f(2)=-1\Rightarrow N(2;-1)$

$g(0)=3\Rightarrow P(0;3)$; $g(2)=-1\Rightarrow N(2;-1)$.

c) $RN=\sqrt{1^2+4}=\sqrt{5}$; $PR=5$; $PN=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$.

Observăm că $PN^2+RN^2=PR^2\overset{\text{RTP}}{\Rightarrow}PN\perp RN$, deci $\mathrm{d}(P;G_f)=PN=2\sqrt{5}u$.

15. a)



b) $OA=4\sqrt{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{AB\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AB=12$ cm.

c) Fie $EF \parallel BC \Rightarrow VE = VF = 8$ cm;

$\sphericalangle(VE;\ BC) \equiv \sphericalangle VEF$. În ΔVAE: $m(\widehat{E})=90^\circ \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} VE = 8\text{ cm} = VF$, iar $EF = 6$ cm pentru că e linie mijlocie în ΔABC.

Fie $EF \cap AO = \{P\}$; $VP \perp EF \overset{\text{TP}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow VP=\sqrt{VE^2-EP^2}$, deci $VP=\sqrt{55}$ cm.

$$A_{VEF}=\frac{VP\cdot EF}{2}=\frac{VE\cdot EF\cdot \sin\widehat{VEF}}{2}\Rightarrow \sqrt{55}\cdot 6=8\cdot 6\sin\widehat{VEF}\Rightarrow \sin\widehat{VEF}=\frac{\sqrt{55}}{8}.$$

d) $P_{MBC} = MB + MC + BC$.

$\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (L.U.L.) $\Rightarrow MB = MC$, deci $P_{MBC} = 2MB + 12$ minim când MB minim, adică $BM \perp AV$.

$$A_{AVB}=\frac{MB\cdot AV}{2}=\frac{VE\cdot AB}{2}\Rightarrow MB\cdot 10=8\cdot 12\Rightarrow MB=9{,}6 \text{ cm, deci } P_{\text{minim}}=31{,}2 \text{ cm.}$$

Varianta 48

I.

1. 9. **2.** 1,62. **3.** $\frac{3}{10}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $4\sqrt{2}$. **6.** 24. **7.** 90. **8.** 288.

II.

9. $a=-\frac{3}{4}$; $b=-\frac{5}{6}$; $c=-\frac{7}{8}$. Cum $[4; 6; 8]=24$, rezultă $a=-\frac{18}{24}$; $b=-\frac{20}{24}$; $c=-\frac{21}{24}$, adică $a\geqslant b\geqslant c$. *Răspuns D.*

10. $f\left(\sqrt{3}-1\right)=2\left(\sqrt{3}-1\right)-2\left(\sqrt{3}-1\right)=0$. *Răspuns B.*

11. $5^2+12^2=13^2 \overset{\text{RTP}}{\Rightarrow}$ triunghiul este dreptunghic, deci $A_\Delta=\frac{c_1\cdot c_2}{2}=\frac{5\cdot 12}{2}=30$ cm². *Răspuns A.*

12. Din teorema lui Pitagora rezultă $AC=\sqrt{10^2-6^2}=8$ cm, deci

$\sin B+\text{tg}B=\frac{AC}{BC}+\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}+\frac{8}{6}=\frac{32}{5}$. *Răspuns A.*

III.

13. a) Notăm cu x, y, z cele trei depozite: $x + y + z = 600$; $x - 20 - 25 = y + 20 = z + 25$; $y = z + 5$. Cu 5 tone.

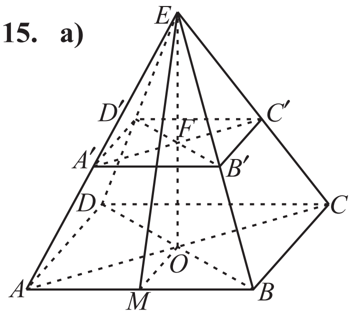
b) $x = z + 70$; $z + 70 + z + 5 + z = 600$; $3z + 75 = 600$; $3z = 525$; obținem $z = 175t$, $x = 245t$, $y = 180t$.

14. a) $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x^2+4}=\frac{2x+4+x^2-2x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x^2+4}=\frac{x+1}{x+2}$.

b) $\frac{a+1}{a+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{a+2-1}{a+2}=1-\frac{1}{a+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{a+2}\in\mathbb{Z}$. Obținem $a+2\in\{\pm1\}$, adică $a\in\{-1;-3\}$; dar $a\neq-1$, deci $a=-3$.

c) $2\cdot\frac{x+1}{x+2}+\frac{1}{2}=3\Rightarrow\frac{2x+2}{x+2}=\frac{5}{2}\Rightarrow 4x+4=5x+10\Rightarrow x=-6$.

15. a)



b) ΔAEC isoscel și $EO\perp AC$ rezultă $m(\widehat{EAO})=30^\circ$, deci $EO=\frac{AE}{2}=2$ cm.

c) Fie M mijlocul laturii AB.

În ΔAEO: $m(\widehat{O})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}AO^2=AE^2-EO^2$, rezultă $AO=2\sqrt{3}$ cm, $AC=4\sqrt{3}$ cm, $AB=2\sqrt{6}$ cm, $MO=\sqrt{6}$ cm.

În ΔEOM: $m(\widehat{O})=90^\circ\overset{TP}{\Rightarrow}ME^2=EO^2+OM^2$, de unde $ME=\sqrt{10}$ cm.

$A_{tot}=A_{lat}+A_b=\frac{P_b\cdot a_p}{2}+A_b=\frac{8\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}{2}+24\Rightarrow A_{tot}=8\left(\sqrt{15}+3\right)$ cm^2.

d) Planul taie muchiile laterale în A', B', C', D'. Dacă $\frac{EF}{EO}=\frac{A'B'}{AB}\overset{net}{=}k$, rezultă $EF=2k$ și $A'B'=2k\sqrt{6}$.

$Vol_{piramidă\ mică}=\frac{A'B'^2\cdot EF}{3}\Rightarrow 2=\frac{4k^2\cdot6\cdot2k}{3}\Rightarrow k^3=\frac{1}{8}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$, deci $EF=1$ cm.

Varianta 49

I.

1. 63. **2.** 24. **3.** $\frac{5}{6}$. **4.** 16. **5.** 6. **6.** 16. **7.** 36. **8.** 150.

II.

9. $2(x-1)=12\Rightarrow x-1=6\Rightarrow x=7$. *Răspuns D.*

10. $f(m)=m+11\Rightarrow 3m-1=m+11\Rightarrow 2m=12\Rightarrow m=6$. *Răspuns C.*

11. $BC=10+40=50$ cm. Prin teorema înălțimii, $AD=\sqrt{10\cdot40}=20$ cm.

$A_\Delta=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{50\cdot20}{2}=500$ cm^2. *Răspuns A.*

12. $A_{paralelogram}=AB\cdot DE$, unde DE este distanța de la D la AB; rezultă $56=7\cdot DE$, deci $DE=8$ cm. *Răspuns B.*

III.

13. a) A are 2008 termeni impari. Dar suma a două numere impare este număr par, rezultă că sunt 1004 termeni pari, deci A par.

b) $A = (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + ... + (3^{2004} + 3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007})$.
$A = 40(1 + 3^4 + ... + 3^{2004}) \vdots 10$. Pentru că A are 2008 termeni, 2008 : 4 = 501, deci termenii sumei A se pot grupa în grupe de câte 4 termeni.

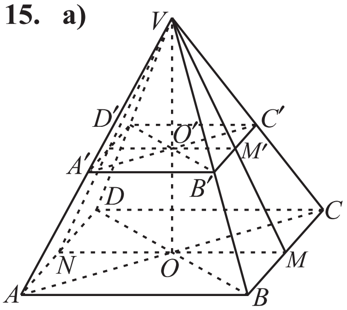
14. a) $E(x) = \left(\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{6}{(x-2)(x+2)}\right) : \dfrac{x^2+4+x^2-4}{(x-2)(x+2)} =$

$= \dfrac{5(x+2)+2(x-2)-6}{2x^2} = \dfrac{7x}{2x^2} = \dfrac{7}{2x}$.

b) $x = \dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow E\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} \cdot 2 = 7$.

c) $\dfrac{7}{2a} = \dfrac{a}{2} + 3 \Rightarrow 7 = a^2 + 6a \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0 \Rightarrow a^2 + 7a - a - 7 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+7)(a-1) = 0 \Rightarrow a \in \{1; -7\}$.

15. a)



b) $MM' = 9$, unde M este mijlocul lui $[BC]$ și M' este mijlocul lui $[B'C']$.

V vârful piramidei din care provine trunchiul și $VO \perp (ABC)$ și $VO' \perp (A'B'C')$, rezultă $OO' = h_{tr}$.

În trapezul $O'M'MO$ ducem $M'E \perp OM$ și atunci $EM = OM - O'M'$, adică $EM = \dfrac{16}{2} - \dfrac{4}{2} = 6$ cm.

În $\Delta M'EM$: $m(\widehat{E}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} M'M^2 = EM^2 + M'E^2$, deci $M'E = 3\sqrt{5}$ cm și $OO' = 3\sqrt{5}$ cm.

c) $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow \dfrac{VO - 3\sqrt{5}}{VO} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow VO = 4\sqrt{5}$ cm.

$Vol_{\text{pir}} = \dfrac{A_b \cdot h_{\text{pir}}}{3} = \dfrac{16^2 \cdot 4\sqrt{5}}{3} = \dfrac{1024\sqrt{5}}{3}$ cm^3.

d) $\{V\} \in (VAD) \cap (VBC) \Rightarrow (VAD) \cap (VBC) = d$; dar $BC \parallel AD \Rightarrow d \parallel BC$.

Fie N mijlocul laturii AD. Atunci M, O, N coliniare și $VN \perp AD$, deci $VM \perp d$ și $VN \perp d$, rezultă $\sphericalangle((VAD), (VBC)) \equiv \sphericalangle MVN$.

$\dfrac{VM'}{VM} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{VM - 9}{VM} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow VM = 12$ cm.

$A_{VMN} = \dfrac{VO \cdot MN}{2} = \dfrac{VM^2 \sin \widehat{MVN}}{2} \Rightarrow 4\sqrt{5} \cdot 16 = 144 \cdot \sin \widehat{MVN} \Rightarrow \sin \widehat{MVN} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

Varianta 50

I.

1. 18. **2.** 18. **3.** 200. **4.** 16. **5.** 28. **6.** 2. **7.** 294. **8.** 27.

II.

9. $A = \{11; 12; 13; ...; 30\}$, deci A are $30 - 10 = 20$ elemente. *Răspuns D.*

10. $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \dfrac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x \in \{-2; 5\}$. *Răspuns D.*

11. $AB + AM + MB \Rightarrow AB = 3MB + MB = 4MB \Rightarrow 12 = 4MB$, deci $MB = 3$ cm și atunci $AM = 12 - 3 = 9$ cm. *Răspuns A.*

12. $\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. *Răspuns C.*

III.

13. **a)** În prima zi: x pagini; în a II-a zi: $x + 5$ pagini; ...; în a V-a zi: $x + 20$ pagini. Atunci $x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) + (x + 20) = 375$, deci $x = 65$ pagini.

b) În prima zi: x pagini; în a II-a zi: $2x$ pagini; în a III-a zi: $4x$ pagini; în a IV-a zi: $8x$ pagini. Obținem $x + 2x + 4x + 8x = 375$, deci $x = 25$ pagini. Atunci:

I zi: 25 pagini; a II-a zi: 50 pagini; a III-a zi: 100 pagini; a IV-a zi: 200 pagini.

14. **a)** $(x + 3)(x - 2) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6 = x(x + 1) - 6$.

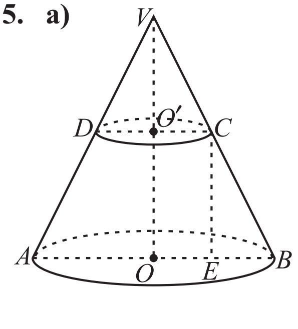
b) $E(x) = \left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{1}{x-2}\right) \cdot \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} =$

$$= \frac{x-2+x+1-x-2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x+2}.$$

c) $\left|E\left(2\sqrt{5}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{5}+2}$ și $\left|E\left(-2\sqrt{5}\right)\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{5}-2}$;

$$m_g = \sqrt{\frac{1}{\left(2\sqrt{5}+2\right)\left(2\sqrt{5}-2\right)}} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 5 - 2^2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}.$$

15. **a)**



b) $A_{lat} = \pi g(R + r)$.

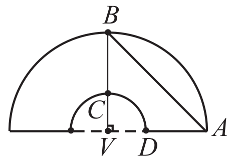
Fie $CE \perp AB$; atunci $EB = R - r = 4$ cm.

Dar $m(\widehat{CBE}) = 60° \Rightarrow m(\widehat{BCE}) = 30°$, de unde $BC = 8$ cm și deci $A_{lat} = 96\pi$ cm^2.

c) În ΔCEB: $m(\widehat{E}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} CE = 4\sqrt{3} = OO'$.

$Vol = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \dfrac{448\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3.

d) ΔVAB este echilateral (V este vârful conului din care provine trunchiul) deci unghiul sectorului după care se desfășoară: $\frac{u°\pi G}{180°}=2\pi R \Rightarrow \frac{u°\pi\cdot 16}{180°}=16\pi \Rightarrow u°=180°$, unde G = 6 este generatoarea conului.



Desfășurat, trunchiul de con reprezintă două semicercuri concentrice. ΔAVB este dreptunghic isoscel de catetă 16, deci $AB=16\sqrt{2}$ cm.

Varianta 51

I.

1. 5. **2.** 756. **3.** 10. **4.** 0. **5.** 5. **6.** $5\sqrt{3}$. **7.** 60. **8.** 5.

II.

9. $E(\sqrt{2}+1)+E(1-\sqrt{2})=\frac{3-\sqrt{2}-1+3-1+\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{2}=2$. *Răspuns C.*

10. $7(x+1)=7 \Rightarrow x+1=1 \Rightarrow x=0$. *Răspuns B.*

11. ΔADB isoscel $\Rightarrow$ m($\sphericalangle DAB$) = m($\sphericalangle DBA$) = 45° $\Rightarrow$ m($\sphericalangle ADB$) = 90°. *Răspuns C.*

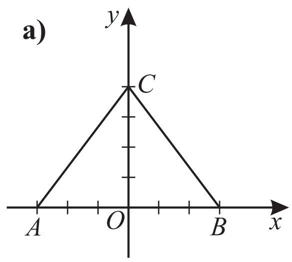
12. $2\pi R=36\pi \Rightarrow R=18$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. a) $1\cdot 3+5(c-1)$ este numărul total de mere, unde c este numărul copiilor. De asemenea, și $4\cdot c+11$ este numărul total de mere. Din $3+5c-5=4c+11$ rezultă $c=13$ copii.

b) numărul de mere este: $3+5\cdot 12=63$ mere.

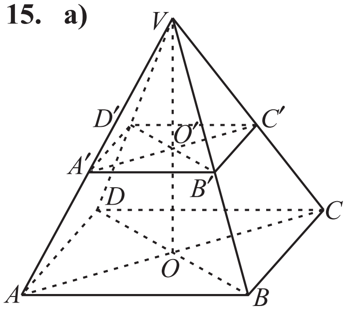
14. a)



b) Prin teorema lui Pitagora obținem $AC=BC=5$. Cum $AB=6$, rezultă $P_{ABC}=16$.

c) $f(-3)=0 \Rightarrow -3a+b=0$; $f(0)=4 \Rightarrow b=4$; $a=\frac{4}{3} \Rightarrow f(x)=\frac{4}{3}x+4$.

15. a)



b) $Vol_{pir}=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{100\cdot 12}{3}=400$ cm^3.

c) Fie $A'B'C'D'$ planul de secțiune care taie VO în O'.

$\frac{V_m}{V_{tr}}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{V_m}{V_M-V_m}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{V_m}{V_M}=\frac{1}{8}$;

$\frac{A'B'^2\cdot VO'}{AB^2\cdot VO}=\frac{1}{8}$, dar $\frac{VO'}{VO}=\frac{A'B'}{AB}\overset{\text{not}}{=}k$, rezultă $k^3=\frac{1}{8}$, adică $k=\frac{1}{2}$. Așadar $\frac{VO'}{12}=\frac{1}{2}$, deci $VO'=6$ cm.

d) $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BO \perp AC \\ BO \perp VO\end{array}\right| \Rightarrow BO \perp (VAC) \\ OP \perp VA \\ OP, VA \subset (VAC)\end{array}\right\} \overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} BP \perp VA$.

$VA = (VAB) \cap (VAC) \Rightarrow \sphericalangle((VAB); (VAC)) \equiv \sphericalangle OPB$.

$\text{tg}\widehat{OPB} = \dfrac{OB}{OP} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{97}}{60} = \dfrac{\sqrt{194}}{12}$.

$VA^2 = OA^2 + VO^2 \Rightarrow VA = \sqrt{194}$ cm; $OA = OB = 5\sqrt{2}$ cm;

În ΔVOA cu $m(\widehat{O}) = 90°$: $OP = \dfrac{OV \cdot OA}{AV} = \dfrac{12 \cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{194}} = \dfrac{60}{\sqrt{97}}$

Varianta 52

I.

1. 1. **2.** 0,6. **3.** 7. **4.** 6. **5.** $\{5\}$. **6.** 9. **7.** 12. **8.** 972.

II.

9. Numere iraționale sunt $\sqrt{3}$ și $4\sqrt{2}$ și mulțimea A are 6 elemente; $P(E) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. *Răspuns C.*

10. $3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}\}$. *Răspuns D.*

11. $\sphericalangle EDB \equiv \sphericalangle DBC$ (alterne interne), dar $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle EBD$, rezultă $\sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle EDB$; deci ΔBED isoscel și atunci BE = 8 cm. *Răspuns B.*

12. $P_{\text{pătrat}} = 4l = 64$ cm $\Rightarrow l = 16$ cm, rezultă că diagonala este egală cu $l\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ cm. *Răspuns C.*

III.

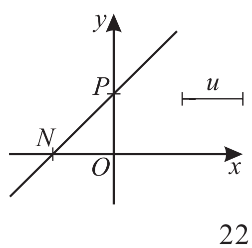
13. **a)** $x + y = 48$; $x = 3y + 4$ cu $4 < y$, rezultă $3y + 4 + y = 48$, de unde $y = 11$ și $x = 37$.

b) Din $(x, y) = 6$ rezultă $x = 6a$ și $y = 6b$, cu a și b prime între ele.

$6a + 6b = 48 \Rightarrow a + b = 8$.

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \text{ și } b = 7 \Rightarrow x = 6 \text{ și } y = 42 \\ a = 3 \text{ și } b = 5 \Rightarrow x = 18 \text{ și } y = 30 \end{array}\right\}$ deci numerele pot fi (6 și 42) sau (18 și 30).

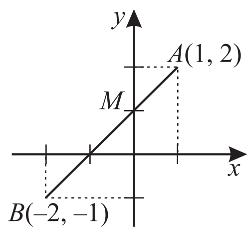
14. **a)** $f(0) = 1 \Rightarrow P(0; 1)$ și $f(-1) = 0 \Rightarrow N(-1, 0)$, deci $G_f = PN$



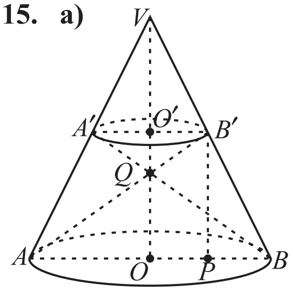
b) $N = 2007 + 2[(0 + 1) + (1 + 1) + (2 + 1) + ... + (2005 + 1)] = 2007 + 2 \cdot [1 + 2 + ... + 2005 + 2006] = 2007 + 2006 \cdot 2007 = 2007 (1 + 2006) = 2007^2$, pătrat perfect.

c) Observăm că $f(1) = 2$ și $f(-2) = -1$, deci $A \in G_f$ și $B \in G_f$.

$MA + MB$ minimă atunci când $M \in AB$, adică $M \in G_f$ și $M(0; f(0))$, adică $M(0;\ 1)$.



15. a)



b) Fie $A'B \cap AB' = \{Q\}$.

Din ΔAQB dreptunghic isoscel și QO mediană rezultă $QO = \dfrac{AB}{2} = 9$ cm.

Din $\Delta A'QB'$ dreptunghic isoscel și QO' mediană rezultă $QO' = \dfrac{A'B'}{2} = 3$ cm, deci $OO' = 12$ cm.

Fie $B'P \perp AB$, deci $B'P = 12$ cm și $PB = 9 - 3 = 6$ cm.

În $\Delta BPB'$: $m(\widehat{P}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} B'B = \sqrt{B'P^2 + PB^2}$, de unde $B'B = 6\sqrt{5}$ cm.

c) $A_{B'QB} = A_{AB'B} - A_{AQB} = \dfrac{B'P \cdot AB}{2} - \dfrac{QO \cdot AB}{2} = \dfrac{12 \cdot 18}{2} - \dfrac{9 \cdot 18}{2} \Rightarrow A_{B'QB} = 27$ cm^2.

d) $A_{VAB} = \dfrac{VO \cdot AB}{2} = \dfrac{VA^2 \cdot \sin \widehat{AVB}}{2}$

$\dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{VO'}{VO} \Rightarrow \dfrac{VA - 6\sqrt{5}}{VA} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{VO - 12}{VO} \Rightarrow 3VA - 18\sqrt{5} = VA \Rightarrow VA = 9\sqrt{5}$ cm;

din $VO = 3VO - 36$ rezultă $VO = 18$. Deci $\sin \widehat{AVB} = \dfrac{4}{5}$.

Varianta 53

I.

1. 10. **2.** 14. **3.** $\dfrac{7}{2}$. **4.** 10. **5.** 2000. **6.** 100. **7.** 3. **8.** 75.

II.

9. $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 33 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(3;\ 2)\}$. *Răspuns D.*

10. $\varnothing$; A; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{2;\ 3\}$; $\{2;\ 4\}$; $\{3;\ 4\}$, deci 8 submulțimi. *Răspuns C.*

11. Mediana împarte un triunghi în două suprafețe care au arii egale, deci $A_{AMB} = \dfrac{24}{2} = 12$ cm^2. *Răspuns B.*

12. $l^2 = 81 \Rightarrow l = 9$ cm, rezultă $P_{\text{pătrat}} = 4l = 4 \cdot 9 = 36$ cm. *Răspuns B.*

III.

13. **a)** $x = 60\%y \Rightarrow x = \dfrac{3}{5}y \Rightarrow 5x = 3y$, deci $\{x;\ y\}$ invers proporționale cu $\{5;\ 3\}$.

b) $2x + 5y = 310 \Rightarrow \dfrac{6}{5}y + 5y = 310$, de unde $y = 50$ și $x = 30$.

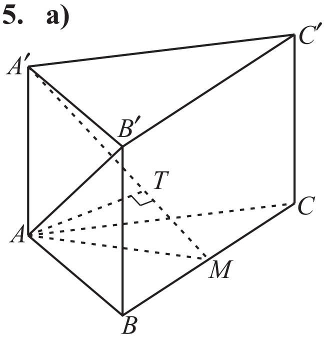
14. **a)** $E(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$.

b) $N = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2$; din $x^2 \geqslant 0$ și $(x-1)^2 \geqslant 0$ obținem $N \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) $\dfrac{n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1}{n^3 + n - n^2 - 1} = \dfrac{(n^4 - 2n^3 + n^2) + (n^2 - 2n + 1)}{n(n^2+1) - 1(n^2+1)} =$

$= \dfrac{n^2(n^2 - 2n + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{(n^2+1)(n-1)} = \dfrac{(n-1)^2(n^2+1)}{(n^2+1)(n-1)} = n - 1 \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 1$.

15. **a)**



b) $A_{tot} = A_{lat} + 2A_b = P_b \cdot h + 2A_b =$

$= 3 \cdot 24 \cdot 12 + 2 \cdot \dfrac{24^2\sqrt{3}}{4} = 288\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm².

c) $\left.\begin{aligned} &AA' \perp (ABC) \\ &AM \perp BC \\ &AM,\ BC \subset (ABC) \end{aligned}\right\} \overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} A'M \perp BC$,

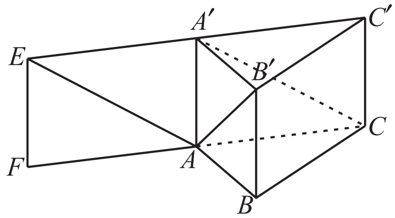
$\left.\begin{aligned} &\text{deci } BC \perp (A'AM) \\ &\text{Ducem } AT \perp A'M \text{ cu } T \in A'M\text{, adică } AT \subset (A'AM) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \perp AT$; dar $AT \perp A'M$, rezultă $AT \perp (A'BC)$ și atunci d$(A;\ (A'BC) = AT$.

În $\Delta A'AM$: $\text{m}(\widehat{A}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} A'M^2 = A'A^2 + AM^2$, deci $A'M^2 = 144 + \left(\dfrac{24\sqrt{3}}{2}\right)^2$,

$A'M = 24$ cm; $AT = \dfrac{A'A \cdot AM}{A'M} = \dfrac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{24}$ cm, rezultă $\text{d}(A;\ (A'BC)) = 6\sqrt{3}$ cm.

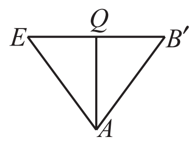
d) Prelungim AC cu $FA = AC$ și $A'C'$ cu $EA' = A'C'$; obținem $EA \parallel A'C$, deci $\sphericalangle(A'C;\ AB') \equiv$ $\equiv \sphericalangle EAB'$.



În $\Delta AB'A'$: $\text{m}(\widehat{A'}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AB'^2 = A'A^2 + A'B'^2$, de unde $AB' = 12\sqrt{5}\text{ cm} = EA$.

Deoarece $A'E = A'C' = A'B'$ rezultă $\Delta EB'C'$ dreptunghic în B', deci $EB' = 24\sqrt{3}$ cm.

$A_{EAB'} = \dfrac{AQ \cdot EB'}{2} = \dfrac{EA^2 \cdot \sin\widehat{EAB'}}{2}$.



În ΔEAQ: $\text{m}(\widehat{Q}) = 90° \overset{\text{TP}}{\Rightarrow} AQ^2 = EA^2 - EQ^2$, deci $AQ = 12\sqrt{2}$ cm.

$12\sqrt{2} \cdot 24\sqrt{3} = 144 \cdot 5 \sin\widehat{EAB'} \Rightarrow \sin\widehat{EAB'} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Varianta 54

I.

1. 18. **2.** 4. **3.** –7. **4.** 10000. **5.** 21. **6.** 5. **7.** 125. **8.** 24.

II.

9. $x = 3y$, $z = 6y \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{3y}{6y} = \frac{1}{2} = 0,5$. *Răspuns A.*

10. $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1 = (x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = (x - 3)(x - 1)$; obținem $a = -3$; $b = -1$, deci $a + b = -4$. *Răspuns D.*

11. $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1 + 3 = 4$. *Răspuns D.*

12. $AB \parallel CD$, deci distanța de la M la AB esre egală cu AD, adică $\sqrt{3}$ cm.

$A_{\Delta AMB} = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ cm^2. *Răspuns B.*

III.

13. a) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} \Rightarrow a = 2b$; $p\% \cdot a = b \Rightarrow p\% \cdot 2b = b \Rightarrow p = \frac{100}{2} \Rightarrow p = 50$.

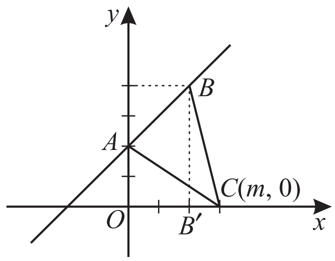
Deci b reprezintă 50% din a.

b) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{a+b}{6} = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow$ $a = 32$ și $b = 16$ (pentru că $\frac{a+b}{2} = 24 \Rightarrow a + b = 48$).

14. a) $f(-3) \cdot f(-7) = -1 \cdot (-5) = 5$.

b) $f(0) = 2 \Rightarrow A(0; 2)$; $f(2) = 4 \Rightarrow B(2; 4)$.

c) $C(m; 0)$.

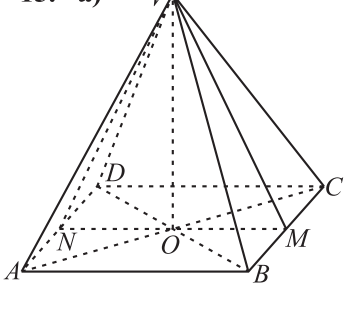


În ΔAOC: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} AC^2 = AO^2 + OC^2$, deci $AC^2 = 4 + m^2$.

În $\Delta BB'C$: $m(\widehat{B'}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} BC^2 = 16 + (m - 2)^2$, unde $BB' \perp Ox$.

$AC = BC \Rightarrow AC^2 = BC^2$, de unde $4 + m^2 = 16 + m^2 - 4m + 4$; obținem $m = 4$, deci $C(4; 0)$.

15. a)



b) $\Delta ABM \equiv \Delta VOM$ (CC)

Din $AB = VO$ (ip), $OM = BM = \frac{AB}{2}$ rezultă $VM = AM$, deci ΔVMA isoscel.

c) În ΔVOM: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VM^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4}$. Obținem $AB^2 = 64$, de unde $AB = VO = 8$ cm. $Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{64 \cdot 8}{3} = \frac{512}{3}$ cm^3.

d) Din $AD \parallel BC$ și $BC \subset (VBC)$ rezultă $AD \parallel (VBC)$, deci $d(A; (VBC)) = d(N; (VBC))$, unde N este mijlocul laturii AD.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp MN \text{ și } BC \perp VM \Rightarrow BC \perp (VMN) \\ \text{Ducem } NT \perp VM \text{ cu } T \in VM \Rightarrow NT \subset (VMN) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp NT;$$

Din $NT \perp BC$ și $NT \perp VM$ rezultă $NT \perp (VBC)$, deci $d(N; (VBC)) = NT$;

Din $A_{VMN} = \dfrac{VO \cdot MN}{2} = \dfrac{NT \cdot VM}{2}$ rezultă $8 \cdot 8 = NT \cdot 4\sqrt{5}$, adică $NT = \dfrac{16\sqrt{5}}{5}\text{cm}$.

Varianta 55

I.

1. 29. **2.** $\dfrac{5}{8}$. **3.** 0,75. **4.** 160. **5.** 53. **6.** 5. **7.** 30. **8.** $16\sqrt{3}$.

II.

9. $10x - 3 = 2x \Rightarrow 8x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{8}$. *Răspuns B.*

10. Dacă $m - 2 = 3$, atunci $m = 5$, deci $A = \{3; 6\} = B$. Dacă $m + 1 = 6$, atunci $m = 5$. *Răspuns D.*

11. Raza cercului circumscris unui hexagon regulat este egală cu latura lui, adică 8 cm; $P_{\text{hexag. reg.}} = 6l = 6 \cdot 8 = 48$ cm. *Răspuns D.*

12. Aria noului pătrat este: $(2l)^2 = 4l^2 = 4 \cdot 15 = 60$ m^2. *Răspuns C.*

III.

13. a) media $= \dfrac{2\cdot 10 + 3\cdot 9 + 6\cdot 8 + 6\cdot 7 + 5\cdot 6 + 1\cdot 5 + 2\cdot 4}{2+3+6+6+5+1+2} = 7{,}20$.

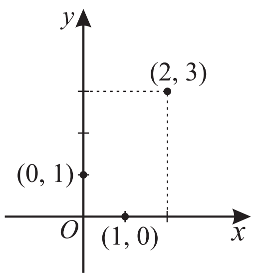
b) $\dfrac{172 + x + y}{25} > 7{,}6$ unde x și y sunt notele celor doi elevi care au luat nota 4, rezultă $x + y > 18$, cu soluțiile ($x = 9$, $y = 10$) sau ($x = 10$, $y = 10$).

14. a) $f(23) + f(24) = -1 + 23 + 1 + 24 = 47$.

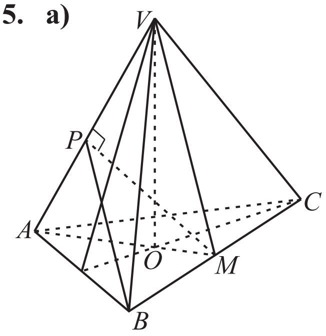
b) $s = (-1 + 13) + (1 + 14) + (-1 + 15) + (1 + 16) + ... + (-1 + 47) + (1 + 48)$; avem $48 - 12 = 36$ termeni și, cum $(-1 + 1) \cdot 18 = 0$, rezultă

$$s = 13 + 14 + 15 + ... + 48 = \frac{48\cdot 49}{2} - \frac{12\cdot 13}{2} = 1098.$$

c) $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 3$.



15. a)



b) Fie $VO \perp (ABC)$; atunci $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{2}$, deci $AO = 8\sqrt{3}$ cm.

În ΔAVO: $m(\widehat{O}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} VO^2 = AV^2 - AO^2$, deci $VO = 4\sqrt{33}$ cm.

$$Vol = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{24^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{33}}{3} = 576\sqrt{11} \text{ cm}^3.$$

c) $A_{VAM} = \frac{VO \cdot AM}{2} = \frac{MP \cdot AV}{2}$, unde $MP \perp AV$, $P \in AV$; din $\frac{4\sqrt{33} \cdot 24\sqrt{3}}{2} = MP \cdot 12\sqrt{5}$ rezultă $MP = \frac{12\sqrt{55}}{5}$ cm.

d) $\left.\begin{matrix} VO \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow VO \perp BC$, dar $BC \perp AM$ $\left.\begin{matrix} \Rightarrow BM \perp (VAM) \\ MP \perp AV \\ MP, AV \subset (AVM) \end{matrix}\right\} \overset{T3P}{\Rightarrow} BP \perp AV$

$$\left.\begin{matrix} (AVM) \cap (AVB) = AV \\ BP \perp AV \\ MP \perp AV \end{matrix}\right| \Rightarrow \sphericalangle((AVM); (AVB)) \equiv \sphericalangle BPM;$$

$$\text{tg} \sphericalangle BPM = \frac{BM}{PM} = \frac{12 \cdot 5}{12\sqrt{55}} = \frac{\sqrt{55}}{11}.$$

Varianta 56

I.

1. 6. **2.** 18. **3.** $\frac{5}{2}$. **4.** 2000. **5.** 120. **6.** 180. **7.** 48. **8.** 3.

II.

9. $E(x) = |-1 - 1| + |3 + 1| - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$. *Răspuns C.*

10. Dacă p este prim, atunci p^2 are numai trei divizori naturali: 1; p; $p^2 \Rightarrow 1 + p + p^2 = 31$; $p(p + 1) = 30 \Rightarrow p = 5$, deci $n = p^2 = 25$. *Răspuns B.*

11. Rombul este format din două triunghiuri isoscele, fiecare având un unghi de 60°, deci rombul este format din două triunghiuri echilaterale și atunci latura rombului este de 2 cm; $P_{\text{romb}} = 4 \cdot 2 = 8$ cm. *Răspuns D.*

12. MN linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă $AB = 6$ cm, deci $A_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm². *Răspuns A.*

III.

13. a) $\frac{a}{2}=\frac{b}{5}\Rightarrow a=\frac{2b}{5}$; $\quad p\%\cdot b=a\Rightarrow p\%\cdot b=\frac{2b}{5}\Rightarrow p=\frac{200}{5}\Rightarrow p=40$, deci a reprezintă 40% din b.

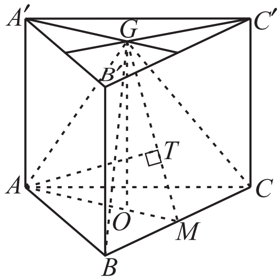
b) Din $3a + b = 44$ și $a=\frac{2b}{5}$ rezultă $\frac{6b}{5}+b=44$, deci $b=20$ și atunci $a = 8$.

14. a) $2a^2 - 20 = 20 - 20 = 0$.

b) $x^2=3-\sqrt{5}+2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}+3+\sqrt{5}\Rightarrow x^2=6+2\sqrt{4}=10$.

c) $x^2=10\Rightarrow x=\sqrt{10}$ sau $x=-\sqrt{10}$; dar $x > 0$, rezultă $x=\sqrt{10}$ și atunci $\left(\sqrt{10}-x-1\right)^{2007}=(-1)^{2007}=-1$.

15. a)



b) $A_{tot} = A_{lat} + 2A_b$; $\quad 48+8\sqrt{3}=48+2A_b$;

$8\sqrt{3}=2A_b\Rightarrow A_b=4\sqrt{3}$;

$A_b=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$, rezultă $AB=4$ cm.

c) $A_{lat} = 48 \Rightarrow 3AB\cdot AA' = 48$, deci $AA' = 4$ cm;

$Vol = A_b\cdot h=16\sqrt{3}$ cm^3.

d) $\Delta GA'A \equiv \Delta GB'B \equiv \Delta GC'C$ (C.C.) $\Rightarrow GA = GB = GC$; cum ΔABC este echilateral rezultă $GABC$ piramidă regulată.

Fie M mijlocul laturii BC; atunci $BC \perp AM$, $BC \perp GM$, deci $BC \perp (AMG)$. Fie $AT \perp GM$ cu $T \in GM$, rezultă $AT \subset (AGM)$. Atunci $BC \perp AT$ și, cum $AT \perp GM$, rezultă $AT \perp (GCB)$, deci $d(A; (GBC)) = AT$.

Fie $GO \perp (ABC)$; $GO = AA' = 4$ cm.

$$A_{AGM}=\frac{OG\cdot AM}{2}=\frac{AT\cdot GM}{2}\Rightarrow\frac{4\cdot4\sqrt{3}}{2}=\frac{AT\cdot2\sqrt{39}}{3}.$$

În ΔGOM: $m(\widehat{O})=90^\circ\overset{\text{TP}}{\Rightarrow}GM^2=GO^2+OM^2$; $\quad OM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm;

$GM^2=16+\frac{4\cdot3}{9}\Rightarrow GM=\frac{2}{3}\sqrt{39}$ cm. Deci $AT=\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

Varianta 57

I.

1. 10. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $(-\infty; 5)$. **5.** 6. **6.** 48. **7.** 25. **8.** 100.

II.

9. $\sqrt{10} \simeq 3{,}1$. *Răspuns A.*

10. $m = \frac{2\cdot 4+3\cdot 5+1\cdot 6+8\cdot 7+1\cdot 8+3\cdot 9+2\cdot 10}{2+3+1+8+1+3+2} = \frac{140}{20} = 7$. *Răspuns A.*

11. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{8}{24} = \frac{6}{EF} \Rightarrow EF = 18$ cm. *Răspuns B.*

12. $\frac{u°\pi R^2}{360°} = \frac{30°\pi 6^2}{360°} = 3\pi$ cm². *Răspuns D.*

III.

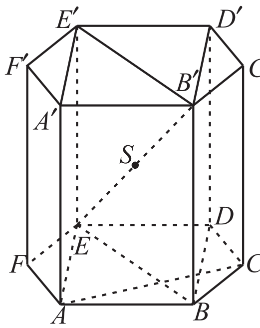
13. a) Fie x numărul elevilor școlii.
70% + 45% – 100% = 15%; 15% x = 42, rezultă x = 280 elevi are școala.
b) 70% 280 = 196; 196 – 42 = 154 elevi participă numai la matematică.

14. a) $5n^2 - 3n - 2 = 5n^2 - 5n + 2n - 2 = 5n(n-1) + 2(n-1) = (n-1)(5n+2)$.

b) $\frac{(2-5n)(2+5n)}{(n-1)(2+5n)}\cdot\frac{n-1}{2(2-5n)} + \frac{11n+4}{10n+4} = \frac{1}{2} + \frac{11n+4}{2(5n+2)} = \frac{5n+2+11n+4}{2(5n+2)} =$
$= \frac{16n+6}{2(5n+2)} = \frac{8n+3}{5n+2}$.

c) Fie $d = (8n+3; 5n+2) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} d \mid 8n+3 \Rightarrow d \mid 40n+15 \\ d \mid 5n+2 \Rightarrow d \mid 40n+16 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow d \mid 40n + 16 - 40n - 15 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

15. a)



b) $A_{lat} = P_b \cdot h = 6\cdot 3\cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$ cm².

c) Din $AB \parallel E'D'$ și $AB = E'D'$ rezultă $ABD'E'$ paralelogram, deci $AE' \parallel BD'$; dar $BD' \subset (DBB')$, rezultă $AE' \parallel (DBB')$.

d) $E'B'BE$ paralelogram și $E'B \cap EB' = \{S\}$.

$\left.\begin{array}{l} AB \perp AE \ (EB \text{ diametru}) \\ AB \perp AA' \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB \perp (AEE'A') \\ AE' \subset AEE'A') \end{array}\right| \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} AB \perp AE' \\ \text{Ducem } ST \perp AE' \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ST \parallel AB \\ S \text{ mijlocul lui } E'B \end{array}\right| \Rightarrow ST$ linie mijlocie în $\Delta E'BA \Rightarrow ST = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$ cm.

Varianta 58

I.

1. 1. **2.** 1,(2). **3.** 582. **4.** $\frac{7}{2}$. **5.** 20. **6.** 16. **7.** 48. **8.** 576.

II.

9. $3x + 9y + 4 = 3(x + 3y) + 4 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$. *Răspuns A.*

10. 1 ar = 100 m^2 $\Rightarrow$ 1200 m^2 = 12 ari. *Răspuns D.*

11. Măsura arcului mic AC este de $360° - 120° - 80° = 160°$. *Răspuns B.*

12. $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle PMN$, dar $m(\sphericalangle BAC) = 90° - 30° = 60°$, rezultă $m(\sphericalangle PMN) = 60°$. *Răspuns B.*

III.

13. **a)** $8 \cdot 13 + 7 = 111$ (pentru că $7 \cdot 13 + 7 = 98$).

b) $\overline{abc} = 13k + 7 \Rightarrow \overline{abc} - 7 = 13k$; $(999 - 7) : 13 = 76$ rest 1.

deci numerele sunt $\left.\begin{array}{l} 13 \cdot 8 + 7 = 111 \\ 13 \cdot 9 + 7 = 124 \\ \vdots \\ 13 \cdot 76 + 7 = 995 \end{array}\right\} \Rightarrow 76 - 7 = 69$ numere.

14. **a)** $F(x) = \frac{x^2(x+1) - 9(x+1)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x}$.

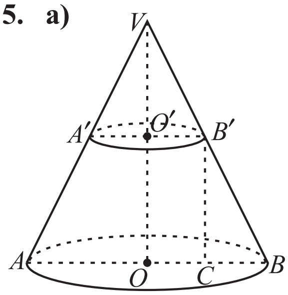
b) $\frac{a+1}{a} = a + 1 \Rightarrow (a+1)(a-1) = 0 \Rightarrow a \in \{-1; 1\}$.

c) $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$;

$S = 6 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}$;

$S = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$; $S = 6 + \frac{3}{8} = \frac{51}{8}$.

15. **a)**



b) $r + R = 10$.

Ducem $B'C \perp AB$ și atunci în $\Delta B'BC$ cu $m(\widehat{C}) = 90°$ avem $B'B^2 = B'C^2 + CB^2$ (Teorema lui Pitagora). Obținem $BC = 4$ cm și, cum $BC = R - r$ și $R + r = 10$, rezultă $R = 7$ cm.

c) $Vol = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$; cum $r = 3$ cm, rezultă $Vol = \pi(49 + 9 + 21)$, adică $Vol = 79\pi$ cm^3.

d) Fie $u°$ unghiul desfășurării. Atunci $\frac{u°\pi G}{180°} = 2\pi R$, unde G este generatoarea conului din care provine trunchiul.

$\frac{VB'}{VB} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{VB - 5}{VB} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7VB - 35 = 3VB \Rightarrow VB = \frac{35}{4}$, deci $\frac{u°\pi \cdot 35}{4 \cdot 180} = 2\pi \cdot 7$ și atunci $u° = 288°$.

Varianta 59

I.

1. 120. **2.** 9. **3.** 4. **4.** 15. **5.** 96. **6.** 24. **7.** 64. **8.** $36\sqrt{3}$.

II.

9. $f(x) = g(x) \Rightarrow -2x + 5 = x + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$; $f(1) = -2 + 5 = 3$ și atunci $G_f \cap G_g = (1; 3)$. *Răspuns D.*

10. $E(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 4x - 1 = 16x + 8 = 8(2x + 1)$. *Răspuns B.*

11. Prin teorema lui Pitagora obținem $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din aceasta, deci mediana este de 5 cm. *Răspuns C.*

12. Fie O centrul hexagonului regulat, hexagonul regulat este format din 6 triunghiuri echilaterale congruente cu ΔOAF, deci $AE = 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm. *Răspuns D.*

III.

13. **a)** Dacă eliminăm pe rând câte un element din mulțimea A rămân de fiecare dată 9 elemente, deci sunt 10 submulțimi.

b) Cu 0 elemente: 1 submulțime $\rightarrow \varnothing$.

Cu 1 element: 10 submulțimi $\rightarrow \{1\}; \{2\}; ...; \{10\}$.

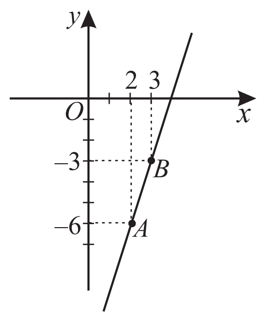
Cu 2 elemente: $9 + 8 + 7 + ... + 3 + 2 + 1 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ submulțimi $\rightarrow \{1; 2\}; ...; \{1; 10\}; \{2; 3\}; ...; \{2; 10\}; ...; \{9; 10\}$.

În total sunt 1 + 10 + 45 = 56 submulțimi.

14. **a)** $1 - 3(-5) = 1 + 15 = 16$, da, este soluție.

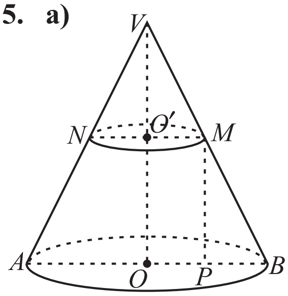
b) $A(2; -6)$ pentru că $3 \cdot 2 - y = 12$, deci $y = -6$.

$B(3; -3)$ pentru că $3 \cdot 3 - y = 12$, deci $y = -3$.



c) $\begin{cases} x - 3y = 16 \\ -9x + 3y = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = -20 \\ x - 3y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} - 16 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)\right\}$.

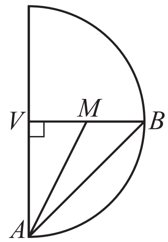
15. a) 

b) $Vol = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 8\sqrt{3}}{3} = \frac{512\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3, unde $h = VO = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm.

c) $A_{lat} = \pi g(R + r)$.

M mijlocul laturii VB și $MN \parallel AB$, rezultă MN linie mijlocie. Atunci $MN = 8$ cm, rezultă $r = 4$ cm, iar $g = 8$ cm. $A_{lat} = \pi \cdot 8(8 + 4) = 96\pi$ cm^2.

d) Desfășurăm conul:



Măsura unghiului sectorului care reprezintă desfășurarea conului este: $\frac{u^0 \pi G}{180°} = 2\pi R \Rightarrow \frac{u° \pi \cdot 16}{180°} = 2\pi \cdot 8 \Rightarrow u° = 180°$.

În ΔVAM: $m(\hat{V}) = 90° \overset{TP}{\Rightarrow} AM = \sqrt{16^2 + 8^2}$, deci $AM = 8\sqrt{5}$ cm.

Varianta 60

I.

1. 30. **2.** 12. **3.** 140. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** 90. **6.** 36. **7.** 140. **8.** 4.

II.

9. Numerele naturale din intervalul $[-2;\ 1]$ sunt 0 și 1, deci $\{0;\ 1\}$. *Răspuns B.*

10. $a = 16 - b \Rightarrow 3(16 - b) = 5b \Rightarrow 48 - 3b = 5b \Rightarrow 8b = 48 \Rightarrow b = 6$ și $a = 10$. *Răspuns C.*

11. $180° - 145° = 35°$. *Răspuns A.*

12. $\left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 4 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = 6\sqrt{2}$. *Răspuns C.*

III.

13. a) $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} \Rightarrow a = \frac{4b}{5}$; $\quad p\%\, b = a \Rightarrow p\%\, b = \frac{4b}{5} \Rightarrow p = \frac{400}{5} = 80$, deci a reprezintă 80% din b.

b) $\left.\begin{array}{l} 3a + c = 285 \\ a = \frac{4c}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12c}{7} + c = 285$; obținem $c = 105$; $a = 60$; $b = 75$.

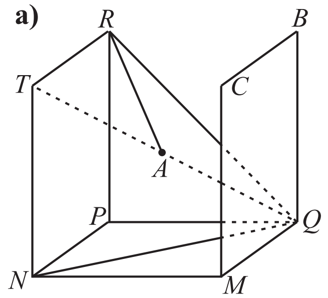
14. a) $\frac{x}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.

b) $2(1-x^2)+x(1-x^2)=(2+x)(1-x)(1+x)$.

c) $E(x)=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x+2}{(x+2)(1-x)(1+x)}+\frac{x}{1+x}\right)\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}=$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}=\frac{x+1-1+x^2-x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}=\frac{x^2}{x}=x.$$

15. a)



b) $\left.\begin{array}{l}(MNP)\perp(NRP)\\ RP\perp NP\\ NP=(MNP)\cap(NRP)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}RP\perp(NQP)\\ PQ\subset(NQP)\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow RP\perp PQ\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} RQ=10\sqrt{2}$ cm.

NQ este diagonală în pătrat și este egală cu $10\sqrt{2}$ cm.

Din $NR=10\sqrt{2}$ cm rezultă ΔNRQ echilateral și, cum $PR = PN = PQ$, rezultă $PNRQ$ piramidă regulată cu vârful P și baza NQR.

c) $\left.\begin{array}{l}QP\perp(NPR)\\ PR\perp TR\\ TR,\ PR\subset(NPR)\end{array}\right\}\overset{\text{T3P}}{\Rightarrow} QP\perp TR.$

$\left.\begin{array}{l}TN\perp(PNM)\\ NQ\subset(PNM)\end{array}\right|\Rightarrow TN\perp NQ\overset{\text{TP}}{\Rightarrow} TQ^2=TN^2+NQ^2$; obținem $TQ=\sqrt{100+200}=10\sqrt{3}$ cm.

Fie A mijlocul segmentului TQ; atunci $RA=\frac{TQ}{2}=5\sqrt{3}$ cm.

d) Fie $MQBC$ un pătrat de aceeași parte cu pătratul $NPRT$, astfel încât planele (MQB) și (MNQ) să fie perpendiculare. Obținem $CQ \parallel TP$, deci $\sphericalangle(NQ, TP) \equiv \sphericalangle CQN$ și $CQ=CN=10\sqrt{2}$ cm, rezultă ΔCQN echilateral și m($\sphericalangle CQN$) = 60°.