

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Testul 11**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\sqrt[3]{(6-\sqrt{2})^3} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 5$ .
- 5p** 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 2mx - 6$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$ , știind că graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  într-un punct în care și graficul funcției  $g$  intersectează axa  $Ox$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x^2 - 4x + 12) = \log_3 27$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 3.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-4,0)$ ,  $B(-1,3)$  și  $C(1,m)$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $B$ .
- 5p** 6. Arătați că  $\sin \frac{25\pi}{6} + \cos \frac{23\pi}{3} = 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+b)y + z = 0 \\ x + y + (1+c)z = 0 \end{cases}$ , unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt numere reale nenule.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(-2,0,2)) = -4$ .
- 5p** b) Arătați că, dacă  $abc + ab + ac + bc \neq 0$ , atunci matricea  $A(a,b,c)$  este inversabilă.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția  $(0,0,0)$ , atunci numărul  $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  este întreg.
2. Pe mulțimea  $G = (0,2)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$  și se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0,2)$ ,  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $1 * 1 = 1$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $f(x) * f(y) = f(xy)$ , pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$ .
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $f\left(\frac{1}{2}\right) * f\left(\frac{2}{3}\right) * f\left(\frac{3}{4}\right) * \dots * f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \frac{2n}{n+1}$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 3$ .
- 5p** a) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ .
- 5p** b) Arătați că funcția  $f$  este convexă pe  $(0,1)$ .

**5p** c) Demonstrați că  $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$ , pentru orice  $x \in (1, +\infty)$ .

2. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră numărul  $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ .

**5p** a) Arătați că  $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$ .

**5p** b) Arătați că  $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$ .

**5p** c) Demonstrați că  $I_n \leq \ln 2$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .