

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Testul 12

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$a = 2\sqrt{2}$ Cum $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$ , deci $2 < a < 3$ , obținem că $[a] = 2$	2p 3p
2.	Axa $Ox$ este tangentă la graficul funcției $f \Rightarrow \Delta = 0$ $m^2 - 4 = 0$ , deci $m = -2$ sau $m = 2$	2p 3p
3.	$(x-1)(x+2) = (x-1)(x+2)^2 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1) = 0$ $x = -2$ , care nu convine; $x = -1$ , care nu convine; $x = 1$ , care convine	2p 3p
4.	$C_n^2 = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0$ Cum $n$ este număr natural, $n \geq 2$ , obținem $n = 11$	3p 2p
5.	Punctul de intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$ este punctul $M(-1, -1)$ $m_{d_2} = -1$ și, cum $m_d \cdot m_{d_2} = -1$ , obținem $m_d = 1$ , deci ecuația dreptei $d$ este $y = x$	2p 3p
6.	$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{5\pi + \pi}{2 \cdot 12} \cos \frac{5\pi - \pi}{2 \cdot 12} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} =$ $= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(4,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(4,2)) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 16 + (-2) + (-18) - 12 - (-12) - (-4) = 0$	2p 3p
b)	$A(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,1)) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A(2,1)) \leq 2$ Cum $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ , obținem că rangul matricei $A(2,1)$ este egal cu 2	3p 2p
c)	$n^2 - 3n + 1 = p^2 - 3p + 1 \Leftrightarrow (n-p)(n+p-3) = 0$ Cum $n$ și $p$ sunt numere naturale nenule și distincte, obținem $n + p = 3$ , iar perechile sunt $(1,2)$ și $(2,1)$	2p 3p
2.a)	$(-1) * 3 = \frac{-3}{3} - (-1) - 3 + 6 =$ $= -1 + 1 - 3 + 6 = 3$	3p 2p

<b>b)</b>	$x*(y+z-3) = \frac{x(y+z-3)}{3} - x - (y+z-3) + 6 = \frac{xy+xz}{3} - 2x - y - z + 9 =$ $= \frac{xy}{3} - x - y + 6 + \frac{xz}{3} - x - z + 6 - 3 = (x*y) + (x*z) - 3, \text{ pentru orice numere reale } x, y \text{ și } z$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	<p><math>x*6 = 6*x = x</math>, pentru orice număr real <math>x</math>, deci <math>e = 6</math> este elementul neutru al legii de compoziție „*”, de unde obținem că <math>x*x' = x'*x = 6</math>, unde <math>x'</math> este simetricul lui <math>x</math> în raport cu legea de compoziție „*”</p> <p>Deoarece <math>2x - 3 = x + x - 3</math> și <math>x*(y+z-3) = (x*y) + (x*z) - 3</math>, pentru orice <math>x, y, z \in \mathbb{R}</math>, obținem <math>(x*x) + (x*x') - 3 + (x'*x) + (x'*x) - 3 = 42 \Leftrightarrow (x*x) + 6 - 3 + 6 + 6 - 3 = 42</math>, deci <math>x*x = 30 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2x + 6 = 30</math>, de unde obținem <math>x = -6</math> sau <math>x = 12</math>, care convin</p>	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot (x^2 + 2)' =$ $= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	<p>Tangenta la graficul funcției <math>f</math> în punctul de abscisă <math>x = \sqrt{2}</math>, situat pe graficul funcției <math>f</math>, este paralelă cu axa <math>Ox \Leftrightarrow f'(\sqrt{2}) = 0</math></p> <p>Cum <math>f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} - a</math>, pentru orice număr real <math>a</math>, obținem că <math>\frac{\sqrt{2}}{2} - a = 0</math>, deci <math>a = \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p>	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - ax}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - a \right)}{x} = 1 - a, \text{ pentru orice număr real } a$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (1-a)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0, \text{ deci, pentru orice număr real } a, \text{ dreapta de ecuație } y = (1-a)x \text{ este asimptotă spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^3 \frac{x f(x)}{\arctg x} dx = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _1^3 =$ $= \frac{81-1}{4} = 20$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (x^2 + 1)' \arctg x dx = \frac{x^2 + 1}{2} \arctg x \Big _1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} 1 dx =$ $= \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2} x \Big _1^{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	<p>Pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math> și orice <math>x \in [0, 1]</math>, <math>0 \leq x^{2n} \leq 1</math> și <math>0 \leq \arctg x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \arctg^n x \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n</math>,</p> <p>de unde obținem că <math>0 \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4}\right)^n dx = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n</math></p> <p>Cum <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0</math>, obținem că <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>